

Alexander Zin

Kazan. Universitet. Fiziko-matematičeskoe
obshchestvo.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE
de Kasan

Deuxième série. Tome III.

Q
60
.K21
A2

ИЗВѢСТІЯ

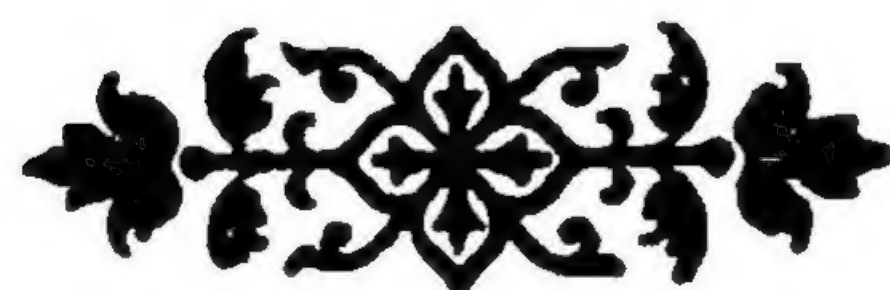
Izvēstija

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ III



КАЗАНЬ

Типо-литографія Императорскаго Университета

1898.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE
de Kasan

Deuxième série. Tome III.

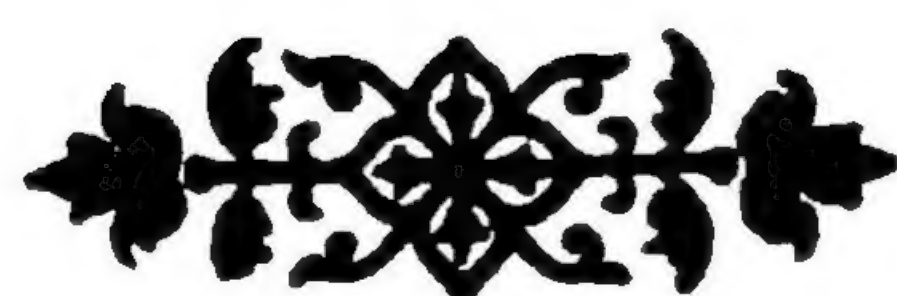
ИЗВѢСТІЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ

~~~~~

**ВТОРАЯ СЕРІЯ**

**ТОМЪ III**



**КАЗАНЬ**

Типо-литографія Императорскаго Университета  
**1898.**

# ОГЛАВЛЕНИЕ III ТОМА.

## I.

|                                                                                                                                                                                                            | <i>Стр.</i> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <i>G1a,b</i> И. Долбня. Изъ теоріи абелевыхъ интеграловъ 1, 57 и 109.                                                                                                                                      |             |
| <i>T3c</i> Д. Гольдгаммеръ. Электромагнитная теорія свѣта<br>§ 13—22 . . . . .                                                                                                                             | 27.         |
| <i>K6a</i> П. Граве. Къ вопросу о трилинейныхъ координатахъ                                                                                                                                                | 82.         |
| <i>R3aα</i> Е. Волотовъ. Задача о разложеніи даннаго винта на<br>два винта съ равными параметрами и слѣдствія ея.                                                                                          | 97.         |
| <i>H1a</i> Д. Синцовъ. Распространеніе даннаго Э. Пикаромъ<br>новаго доказательства существованія интеграла<br>системы дифференціальныхъ уравненій 1-го по-<br>рядка на комплексныя значенія переменныхъ . | 138.        |
| <i>R3h</i> Д. Зейлигеръ. Доказательство и обобщеніе одной тео-<br>ремы аналитической механики. . . . .                                                                                                     | 147.        |

## II.

|                                                                                                                                                                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Отчетъ о дѣятельности Физико-математическаго Общества при<br>Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ за второй годъ его су-<br>ществованія . . . . .                                                                           | 1.  |
| Протоколы 25—30 засѣданія Физико-математическаго Общества 8, 15, 35.                                                                                                                                                          |     |
| Д. Зейлигеръ. Задачи.                                                                                                                                                                                                         |     |
| Матеріалы для біографіи Н. И. Лобачевского: 1. Воспоминаніе<br>о службѣ и трудахъ проф. Казанскаго университета Лобачевского—<br>проф. А. Θ. Попова. 2. Рѣчь проф. Н. Н. Булича передъ гробомъ Н.<br>И. Лобачевского. . . . . | 27. |
| И. Износковъ. Воспоминанія о В. Г. Имшенецкомъ . . . .                                                                                                                                                                        | 36. |
| Отъ комитета для образованія фонда имени Н. И. Лобачевского                                                                                                                                                                   | 45. |
| А. Васильевъ. Іезуитъ Саккери—итальянскій предшествен-<br>никъ Лобачевского . . . . .                                                                                                                                         | 53. |
| Рѣшеніе задачи Д. Зейлигера: 1) В. Стрекалова, 2) Д. Зейлигера                                                                                                                                                                | 58. |

## ПРИЛОЖЕНИЯ.

VI Бронекеръ. Понятіе о числѣ.

Систематическій указатель книгъ и статей, напечатанныхъ въ Казани до 1890 г. Сост. Д. Синцовъ.

Q1b Е. Вельтрами. Опытъ объясненія неевклидовой геометріи.

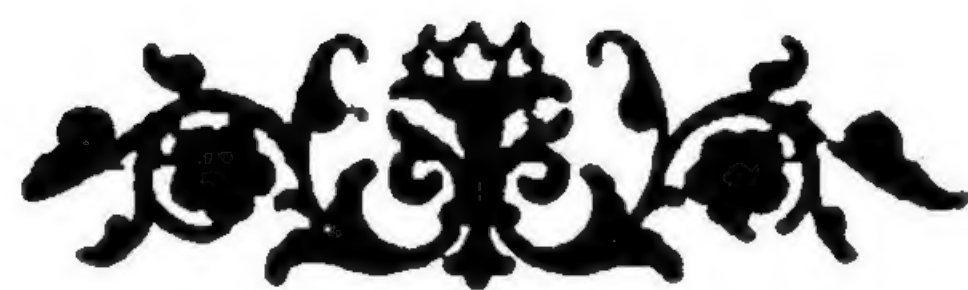
Q1a Е. Вельтрами. О пространствахъ съ постоянною кривизною.

Q1a В. Риманнъ. О гипотезахъ, лежащихъ въ основѣ геометріи.

Q1a Г. Гельмгольцъ. О фактахъ, лежащихъ въ основѣ геометріи.

Q1a С. Лм. Замѣчанія на работу Гельмгольца.

Q1a. Г. Пуанкаре. Объ основныхъ гипотезахъ геометріи.



# ИЗЪ ТЕОРИИ АБЕЛЕВЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

## Глава I.

**Число интеграловъ перваго вида. Определеіе рода алгебраической кривой.**

1. Въ классическомъ мемуарѣ „Sur une propriété generale d'une classe tres étendue des fonctions transcendantes“ Абель подробно изучаетъ частный случай своей теоремы, а именно тотъ случай, когда сумма абелевыхъ интеграловъ приводится въ постоянной величинѣ.

Во первыхъ авторъ показываетъ, что всѣ интегралы перваго вида заключаются въ формѣ

$$\int \frac{f_1(x,y) dx}{\chi'_y(x,y)},$$

гдѣ

$$\chi(x,y) = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \dots + p_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0 \dots (1)$$

есть неприводимое алгебраическое уравненіе, отъ котораго зависятъ интегралы,  $f(x,y)$  есть цѣлая функція (относительно  $x$  и  $y$ ), подчиненная условію:

„степень  $f_1(x,y)$  \*)  $<$  степени  $\chi'_y(x,y) - 1$ , или, слѣдуя обозначенію Абеля,

$$h f_1(x,y) < h \chi'_y(x,y) - 1 \dots (2)“.$$

Во вторыхъ, при помощи условія (2), Абель находитъ число  $\gamma$  независимыхъ интеграловъ перваго вида; наконецъ,

---

\*) Здѣсь берется степень относительно  $x$ .

въ третьихъ, называя черезъ  $\mu$  число переменныхъ точекъ пересѣченія кривой  $\chi(x,y)=0$  съ неопредѣленной кривой

$$\theta y = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \dots + q^{n-1} y^{n-1},$$

черезъ  $\alpha$ —число произвольныхъ коэффициентовъ функціи  $\theta y$ , Абель доказываетъ, что можно  $\theta y$  выбрать такимъ образомъ, что будетъ имѣть мѣсто равенство

$$\mu - \alpha = \gamma,$$

при чемъ разность  $\mu - \alpha$  пріобрѣтаетъ наименьшее значеніе. Достигнувши этихъ важныхъ результатовъ, Абель сознавалъ, что изысканія его не обнимаютъ всѣхъ возможныхъ случаевъ, что число  $\gamma$  подлежитъ уменьшенію въ тѣхъ случаяхъ, когда функція  $\chi(x,y)$  обладаетъ особенными, спеціальными свойствами; равнымъ образомъ онъ предвидѣлъ, что разность  $\mu - \alpha$  можетъ быть сдѣлана меньше указаннаго предѣла. Слѣдуетъ кромѣ того замѣтить, что, доказавъ существованіе функціи  $\theta y$ , удовлетворяющей условію

$$\mu - \alpha = \gamma,$$

Абель не нашелъ ея простѣйшей общей формы, а лишь, на частномъ числовомъ примѣрѣ, провѣряетъ свои теоретическія изысканія и находитъ четыре типа функціи  $\theta y$  такого рода, что равенство

$$\mu - \alpha = \gamma$$

удовлетворяется. Со времени появленія въ свѣтъ мемуара Римана „Theorie der Abelschen Functionen“ послѣдовалъ длинный рядъ работъ, подвергнувшихъ теорію Абелевыхъ интеграловъ глубокому и всестороннему изученію. Открытія въ области Геометріи касательно *особенныхъ* точекъ алгебраическихъ кривыхъ, а также преобразованій гомографическихъ, квадратическихъ и бираціональных (Cremona) дали возможность перенести теорію Абелевыхъ интеграловъ

на геометрическую почву, что главнымъ образомъ выполнено *Клебшемъ* и его послѣдователями. Вслѣдствіе принятаго наукой новаго направленія, подверглась забвенію и форма интеграловъ перваго вида, данная Абелемъ. Въ современныхъ систематическихъ сочиненіяхъ по теоріи Абелевыхъ функцій нельзя найти указаній на тѣ вопросы, рѣшеніемъ которыхъ занимался Абель. Только въ примѣчаніяхъ ко второму изданію „Oeuvres complètes“ Абеля 1881 г. Sylow упоминаетъ о важномъ значеніи Абелевскаго числа  $\gamma$ , которое, въ случаѣ отсутствія кратныхъ точекъ, обозначаетъ *родъ* кривой (*genre*)

$$\chi(x, y) = 0.$$

Въ настоящемъ изслѣдованіи выводится теорія Абелевыхъ интеграловъ только изъ Абелевой теоремы, не отступая отъ формы, преподанной Абелемъ для интеграловъ перваго вида. Изучая вопросы, поставленные Абелемъ по совершенно другой методѣ, можно найти простѣйшую общую форму функціи  $\theta u$ , зависящую исключительно отъ формы основнаго уравненія (1). Нахожденіе этой простѣйшей формы, какъ видно будетъ ниже, не представляетъ никакихъ трудностей. Изъ основной формы выводятся типы, найденные Абелемъ, равно какъ и множество другихъ. Въ своемъ изслѣдованіи я буду повсюду держаться обозначеній Абеля для того, чтобы съ большею легкостію можно было сравнивать результаты. Кромѣ того я позволилъ себѣ сдѣлать приложеніе общей теоріи къ эллиптическимъ и гиперэллиптическимъ интеграламъ, которые, въ отношеніи къ изучаемому вопросу, обладаютъ одинаковыми свойствами со всѣми Абелевыми интегралами. Для того, чтобы пользоваться приемами Абеля при нахожденіи  $\theta u$  въ частныхъ случаяхъ, нужно каждый разъ выполнить огромную, очень обременительную выкладку. Въ предлагаемомъ приѣмѣ вопросъ рѣшается безъ всякой выкладки — графически.

2. Пусть алгебраическое уравнение, отъ котораго зависятъ Абелевы интегралы,

$$\chi(x, y) = 0$$

будетъ  $n$ -й степени относительно  $y$ . Приложимъ методу *Ruiseux* для отдѣленія корней уравненія при  $x = \infty$ . По этой методѣ члены уравненія выражаются точками плоскости; абсциса точки есть показатель надъ  $y$ , — ордината показатель надъ  $x$ . Пусть точка  $A_n^0$  выражаетъ  $y^n$  (черт. I). Возставивши изъ точки  $A_n^0$  перпендекуляръ къ оси  $O\xi$ , будемъ вращать его справа налѣво до тѣхъ поръ пока встрѣтимъ какую нибудь изъ точекъ, ранѣе намѣченныхъ въ вышеупомянутомъ смыслѣ; пусть первая изъ встрѣчающихся точекъ есть  $A_{\beta_1}^{\alpha_1}$  и пусть точка эта соотвѣтствуетъ члену

$$y^{\alpha_1} x^{\beta_1}.$$

Уравненіе прямой линіи  $A_n^0 A_{\beta_1}^{\alpha_1}$  относительно осей  $(\xi, \eta)$  есть

$$\eta = -\frac{\beta_1}{n - \alpha_1} (\xi - n).$$

На этой прямой лежитъ группа членовъ одной и той же степени относительно  $x$ . Если взять

$$\beta_1 = n't', \quad n - \alpha_1 = n'\mu', \quad y = vx^{\frac{m'}{\mu'}}$$

то степень каждаго члена, лежащаго на прямой  $A_n^0 A_{\beta_1}^{\alpha_1}$ , выразится начальною ординатою этой прямой, а потому будетъ опредѣляться формулою

$$\frac{\beta_1 n}{n - \alpha_1} = \frac{nm'}{\mu'}.$$

Степень всякаго другаго члена функціи  $\chi(x, y)$  будетъ равна начальной ординатѣ прямой, проходящей черезъ точку, выражающую этотъ членъ, параллельно линіи  $A_n^0 A_{\beta_1}^{\alpha_1}$ ; а по-



оторопахъ трапеціи, за исключеніемъ основанія  $A''_0O$ . Если вообразимъ прямую, упирающуюся въ точку  $A''_0$ , а другимъ концомъ скользящую по ординатѣ  $OB_1$ , то угловые коэффициенты ея будутъ измѣняться

$$\text{отъ } -\frac{1}{n} \text{ до } -\frac{\beta_1}{n},$$

и при этомъ движеніи мы получимъ  $\beta_1$  членовъ. Когда таже прямая будетъ скользить по слѣдующей ординатѣ, то угловые коэффициенты ея будутъ измѣняться отъ

$$-\frac{1}{n-1} \text{ до } -\frac{\beta_1}{n-1},$$

и мы опять получимъ  $\beta_1$  членовъ, и т. д.; наконецъ, заставляя конецъ прямой скользить по ординатѣ  $A^{\alpha_1}_{\beta_1} A_1$ , увидимъ, что угловой коэффициентъ ея измѣняется отъ

$$-\frac{1}{n-\alpha_1} \text{ до } -\frac{\beta_1}{n-\alpha_1}.$$

Отсюда видно, что площади

$$A^{\alpha_1}_{\beta_1} A_1 O B_1$$

соотвѣтствуетъ число членовъ, опредѣляемое формулою

$$(\alpha_1 + 1) \beta_1 = (n''\mu'' + n'''\mu''' + \dots + n^\epsilon\mu^\epsilon + 1)n'm'.$$

Опредѣлимъ теперь число членовъ, соотвѣтствующихъ площади треугольника

$$A_1 A^{\alpha_1}_{\beta_1} A''_0.$$

Сначала нужно измѣнять угловой коэффициентъ вышеупомянутой прямой отъ

$$-\frac{1}{n-\alpha_1-1} \text{ до } -\frac{\varrho}{n-\alpha_1-1},$$

гдѣ  $\varrho$  опредѣляется условіемъ

$$\frac{\varrho}{n-\alpha_1-1} \leq \frac{m'}{\mu'}, \text{ т. е.}$$

$$\varrho \leq (n-\alpha_1-1) \frac{m'}{\mu'};$$

значитъ,  $\varrho$  есть наибольшее цѣлое число, заключающееся въ этой дроби, или по общепринятому обозначенію,

$$\varrho = E (n-\alpha_1-1) \frac{m'}{\mu'}.$$

Ясно поэтому, что искомое число членовъ выразится суммою

$$\sum_{i=1}^{n-\alpha_1-1} E \frac{im'}{\mu'} = \sum_{i=1}^{n'\mu'-1} E \frac{im'}{\mu'} = S.$$

Эту сумму легко вычислить. Имѣемъ

$$\frac{m'}{\mu'} = E \frac{m'}{\mu'} + \frac{r_1}{\mu'},$$

$$\frac{2m'}{\mu'} = E \frac{2m'}{\mu'} + \frac{r_2}{\mu'},$$

$$\frac{3m'}{\mu'} = E \frac{3m'}{\mu'} + \frac{r_3}{\mu'},$$

. . . . .

$$\frac{(n'\mu'-1)m'}{\mu'} = E \frac{(n'\mu'-1)m'}{\mu'} + \frac{r_{n'\mu'-1}}{\mu'},$$

гдѣ  $r_1, r_2, \dots, r_{n'\mu'-1}$  суть наименьшіе положительные вычеты по модулю  $\mu'$ . Складывая всѣ написанныя уравненія, имѣемъ

$$\frac{n'\mu'(n'\mu'-1)}{2} \frac{m'}{\mu'} = S + \frac{n'\mu'(\mu'-1)}{2\mu'},$$

откуда

$$S = \frac{n'm'(n'\mu'-1)}{2} - \frac{n'(\mu'-1)}{2}.$$



получимъ

$$\begin{aligned}
 N' &= N - \beta_\varepsilon - 1 = \\
 &= \frac{m'n'(n'\mu' - 1)}{2} - \frac{n'(\mu' - 1)}{2} + (n''\mu'' + n''' + \dots + n^\varepsilon\mu^\varepsilon)m''n'' = \\
 &+ \frac{m''n''(n''\mu'' - 1)}{2} - \frac{n''(\mu'' - 1)}{2} + (n'''\mu''' + \dots + n^\varepsilon\mu^\varepsilon)m''n'' + \\
 &+ \dots \dots \dots \\
 &+ \frac{m^\varepsilon n^\varepsilon(n^\varepsilon\mu^\varepsilon - 1)}{2} - \frac{n^\varepsilon(\mu^\varepsilon - 1)}{2} \dots \dots \dots 5.
 \end{aligned}$$

5. По теоремѣ Абеля для интеграловъ перваго вида

$$\int \frac{f_1(x,y)}{\chi'_y(x,y)} dx$$

имѣемъ

$$h f_1(x,y) < h \chi'_y(x,y) - 1,$$

гдѣ буквой  $h$ , здѣсь и въ дальнѣйшемъ, будемъ обозначать, согласно Абелю, степень функціи относительно  $x$ . Слѣдовательно, для нахожденія числа членовъ функціи  $f_1(x,y)$ , нужно уменьшить степени всѣхъ членовъ  $\chi'_y(x,y)$  на единицу. Это уменьшеніе достигается перенесеніемъ начала координатъ въ точку  $O''(1,1)$ . Тогда изъ  $N'$  (5) исключается  $n$  членовъ, лежащихъ на оси  $O\xi$ . Кромѣ того, для удовлетворенія неравенству

$$h f_1(x,y) < h \chi'_y(x,y) - 1$$

наибольшею степенью  $f_1(x,y)$  нужно изъ  $N'$  исключить всѣ члены, лежащіе на ломаной линіи

$$A_0^n A_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots B_\varepsilon;$$

членовъ этихъ подлежащихъ исключенію, будетъ, очевидно

$$n' + n'' + n''' + \dots + n^\varepsilon - 1.$$



слѣдовательно

$$\begin{aligned} & h\theta y' + h\theta y'' + \dots + h\theta y^{n'\mu'} = \\ & = m'n'. n' \mu' + (n'' \mu'' + n''' m''' + \dots + n^\varepsilon \mu^\varepsilon - 1) n' m'. \end{aligned}$$

Подобнымъ же образомъ

$$h\theta y^{(n'\mu'+1)} = h\theta y^{(n'\mu'+2)} = \dots = h\theta y^{(n'\mu'+n''\mu'')}.$$

есть начальная ордината прямой

$$A_{\beta_1}^{\alpha_1} A_{\beta_2}^{\alpha_2}$$

на оси  $O'\eta'$ , слѣдовательно

$$\begin{aligned} h\theta y^{(n'\mu'+1)} = h\theta y^{(n'\mu'+2)} = \dots + h\theta y^{(n'\mu'+n''\mu'')} = \\ = m'n' + m''n'' + (n''' \mu''' + \dots + n^\varepsilon \mu^\varepsilon) \frac{n''}{\mu''}; \end{aligned}$$

слѣдовательно

$$\begin{aligned} & h\theta y^{(n'\mu'+1)} + h\theta y^{(n'\mu'+2)} + \dots + h\theta y^{(n'\mu'+n''\mu'')} = \\ & (m'n' + m''n'') n' \mu' + (n''' \mu''' + \dots + n^\varepsilon \mu^\varepsilon - 1) n'' m''. \end{aligned}$$

Далѣе получимъ

$$\begin{aligned} & h\theta y^{(n'\mu'+n''\mu''+1)} + \dots + h\theta y^{(n'\mu'+n''\mu''+n'''\mu''')} = \\ & = (m'n' + m''n'' + m'''n''') n'' \mu'' + (n''' \mu''' + \dots + n^\varepsilon \mu^\varepsilon - 1) n''' m'''. \end{aligned}$$

Наконецъ напишемъ двѣ послѣднія строки:

$$\begin{aligned} & h\theta y^{(n'\mu'+n''\mu''+\dots+n^{\varepsilon-2}\mu^{\varepsilon-2}+1)} + \dots + h\theta y^{(n'\mu'+n''\mu''+\dots+n^{\varepsilon-1}\mu^{\varepsilon-1})} = \\ & = (m'n' + m''n'' + \dots + m^{\varepsilon-1}n^{\varepsilon-1}) n^{\varepsilon-1} \mu^{\varepsilon-1} + (n^\varepsilon \mu^\varepsilon - 1) n^{\varepsilon-1} m^{\varepsilon-1}, \\ & h\theta y^{(n'\mu'+n''\mu''+\dots+n^{\varepsilon-1}\mu^{\varepsilon-1}+1)} + \dots + h\theta y^{(n)} = \\ & = (m'n' + m''n'' + \dots + m^{\varepsilon-1}n^{\varepsilon-1}) n^\varepsilon \mu^\varepsilon + (n^\varepsilon \mu^\varepsilon - 1) n^\varepsilon m^\varepsilon. \end{aligned}$$

Ясно поэтому, что

$$\begin{aligned} & h\theta y' + h\theta y'' + \dots + h\theta y^{(n)} = \\ & = m'n'(n' \mu' - 1) + 2(n'' \mu'' + n''' \mu''' + \dots + n^\varepsilon \mu^\varepsilon) m'n' + \\ & + m''n''(n'' \mu'' - 1) + 2(n''' \mu''' + \dots + n^\varepsilon \mu^\varepsilon) m''n'' + \\ & + \dots \\ & + m^\varepsilon n^\varepsilon (n^\varepsilon \mu^\varepsilon - 1) + 2n^\varepsilon \mu^\varepsilon n^{\varepsilon-1} n^{\varepsilon-1}. \end{aligned}$$



Чтобы удостовериться въ справедливости равенства

$$\mu - \alpha = \gamma$$

замѣтимъ, что

$$h\theta y' = h\theta y'' = h\theta y'''$$

есть начальная ордината прямой  $AB$  на оси  $O'\eta'$ . Уравненіе этой прямой есть

$$y = -\frac{4}{3} (x - 12);$$

слѣдовательно

$$h\theta y' = h\theta y'' = h\theta y''' = 16,$$

слѣдовательно

$$h\theta y' + h\theta y'' + h\theta y''' = 48.$$

Далѣе

$$h\theta y^{(4)} = h\theta y^{(5)} = h\theta y^{(6)} = h\theta y^{(7)} = h\theta y^{(8)}$$

есть начальная ордината линіи  $BC$  на оси  $O'\eta'$ . Уравненіе линіи  $BC$  есть

$$y - 1 = -\frac{1}{5} (x - 9)$$

слѣдовательно

$$h\theta y^{(4)} = h\theta y^{(5)} = h\theta y^{(6)} = h\theta y^{(7)} = h\theta y^{(8)} = \frac{29}{5},$$

а потому

$$h\theta y^{(4)} + h\theta y^{(5)} + h\theta y^{(6)} + h\theta y^{(7)} + h\theta y^{(8)} = 29.$$

Еще имѣемъ

$$h\theta y^{(9)} = h\theta y^{(10)} = h\theta y^{(11)} = h\theta y^{(12)}$$

есть начальная ордината линіи  $CD$ . Уравненіе этой линіи есть

$$y - 3 = \frac{1}{2}x,$$

слѣдовательно

$$h\theta y^{(9)} = h\theta y^{(10)} = h\theta y^{(11)} = h\theta y^{(12)} = 3,$$

а потому

$$h\theta y^{(9)} + h\theta y^{(10)} + h\theta y^{(11)} + h\theta y^{(12)} = 12.$$

Наконецъ

$$h\theta y^{(13)} = 3.$$

Значитъ

$$h\theta y' + h\theta y'' + \dots + h\theta y^{(13)} = 48 + 29 + 12 + 3 = 92.$$

$$hq_0 + hq_1 + \dots + hq_{12} + n - 1 = 54;$$

следовательно

$$\mu - \alpha = 92 - 54 = 38 = \gamma.$$

8. Удостоверившись въ существованіи  $\theta y$ , удовлетворяющей условію

$$\mu - \alpha = \gamma$$

и разыскавъ ея простѣйшую форму, можно изъ этой формы вывести первый основной типъ  $\theta y$ , содержащій безчисленное множество функций, обладающихъ требуемымъ свойствомъ. Разность  $\mu - \alpha$ , выражаемая формулою

$$\begin{aligned} \mu - \alpha = & \{ h\theta y' + h\theta y'' + \dots + h\theta y^{(n)} \} - \\ & - \{ hq_0 + hq_1 + \dots + hq_{n-1} + n - 1 \} \end{aligned}$$

не измѣнится, если мы каждый членъ уменьшаемаго и каждый членъ вычитаемаго (за исключеніемъ  $n - 1$ ) увеличимъ на одно и тоже цѣлое число  $\delta$ . Графически это преобразование достигается построеніемъ ломаной линіи, параллельной и подобной данной, проводя первый элементъ ея черезъ точку, которой абсцисса  $a$ , ордината  $\delta$ . (черт. I). Въ нашемъ частномъ примѣрѣ (черт. II) первый элементъ ломаной линіи надо провести черезъ точку, которой координаты 13 и  $\delta$ , второй — черезъ точку, которой координаты 10 и  $4 + \delta$ , третій элементъ — черезъ точку, которой координаты 5 и

$5 + \delta$ , наконецъ четвертый элементъ—черезъ точку, которой координаты 1 и  $3 + \delta$ . Тогда получимъ

$$\begin{aligned} \theta y = & (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_\delta x^\delta) y^{12} + \\ & + (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{\delta+1} x^{\delta+1}) y^{11} + \\ & + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{\delta+2} x^{\delta+2}) y^{10} + \\ & + \dots \\ & + (l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \dots + l_{\delta+3} x^{\delta+3}). \end{aligned}$$

Чтобы показать возможность нахождения еще новыхъ функций  $\theta y$ , удовлетворяющихъ условию

$$\mu - \alpha = \gamma,$$

представимъ разность  $\mu - \alpha$  въ такой формѣ:

$$\begin{aligned} \mu - \alpha = & \{ (h\theta y' + h\theta y'' + \dots + h\theta y^{n'\mu'}) - (hq_{n-1} + hq_{n-2} + \dots + hq_{n-n'\mu'}) \} + \\ & + \{ (h\theta y^{(n'\mu'+1)} + \dots + h\theta y^{(n'\mu'+n''\mu'')}) - (hq_{n-n'\mu'-1} + \dots + hq_{n-n'\mu'-n''\mu'}) \} \\ & + \dots \\ & - n + 1. \end{aligned}$$

Если мы каждое изъ цѣлыхъ чиселъ, наримѣръ,

$$hq_{n-1}, hq_{n-2}, \dots, hq_{n-n'\mu'}$$

увеличимъ на цѣлое число  $\delta$ , то каждое изъ цѣлыхъ чиселъ тойже группы

$$h\theta y', h\theta y'', \dots, h\theta y^{n'\mu'}$$

увеличится на  $\delta$ , а разность  $\mu - \alpha$  останется безъ перемѣны. Въ нашемъ частномъ примѣрѣ можно взять на этомъ основаніи

$$\begin{aligned} hq_{12} &= \delta, & hq_{11} &= \delta + 1, & hq_{10} &= \delta + 2; \\ hq_9 &= \varepsilon + 4, & hq_8 &= \varepsilon + 4, & hq_7 &= \varepsilon + 4, & hq_6 &= \varepsilon + 4, & hq_5 &= \varepsilon + 4; \\ hq_4 &= \eta + 5, & hq_3 &= \eta + 4, & hq_2 &= \eta + 4, & hq_1 &= \eta + 3; \\ hq_0 &= \pi + 3, \end{aligned}$$

гдѣ  $\delta, \varepsilon, \eta, \pi$  цѣлыя числа.

9. Приложенія изложенной теоріи многочисленны. Приведемъ нѣкоторыя изъ нихъ.

1) Вейерштрассовскій интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

зависитъ отъ алгебраическаго уравненія

$$y^2 - (4x^3 - g_2 x - g_3) = 0;$$

графически это уравненіе представится на чертежѣ III.

Число интеграловъ перваго вида равно числу отмѣченныхъ точекъ въ углѣ  $\eta'0''\xi'$ ; слѣдовательно имѣемъ одинъ независимый интегралъ перваго вида.

Простѣйшая форма  $\theta y$  есть

$$\theta y = y + (a + bx),$$

гдѣ  $a$  и  $b$  произвольные коэффициенты. Этой формой пользуется Halphen въ своемъ сочиненіи „Traité des fonctions olliptiques etc.“, 1886, t. 1, p. 58. Болѣе общая форма  $\theta y$  есть

$$\begin{aligned} \theta y = & (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_\delta x^\delta) y + \\ & + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{\delta+1} x^{\delta+1}). \end{aligned}$$

Если, пользуясь этой послѣдней функціей, примѣнять теорему Абеля къ Вейерштрассовскому интегралу, то можно взять по произволу

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\delta+2};$$

послѣдній корень  $x_{\delta+2}$  уравненія

$$(a_0 + a_1 x + \dots + a_\delta x^\delta)^2 y^2 - (b_0 + b_1 x + \dots + b_{\delta+1} x^{\delta+1})^2 = 0$$

опредѣлится въ зависимости отъ

$$x_1, x_2, \dots, x_{\delta+2}.$$

2) Лежандровскій интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(1+k^2)x^2+k^2x^4}}$$

зависитъ отъ уравненія

$$\chi(x, y) = y^2 - \{1 - (1 + k^2)x^2 + k^2x^4\} = 0;$$

поэтому представится на чертежѣ IV.

Опять имѣемъ одинъ интегралъ перваго вида. Простѣйшая форма  $\theta y$  есть

$$\theta y = (a + bx + cx^2) + y.$$

Теорема Абеля примѣняется при помощи уравненія

$$y^2 - (a + bx + cx^2)^2 = 0, \text{ или } x^4x^4 - (1 + x^2)x^2 + 1 - (a + bx + cx^2)^2 = 0.$$

Уравненіе имѣетъ четыре корня, изъ которыхъ три произвольны. Если желаемъ сдѣлать одинъ изъ корней равнымъ нулю, то надо взять  $a = 1$ ; тогда

$$\theta y = y + (1 + bx + cx^2).$$

Этой формой пользуются Briot и Bouquet („Théorie des fonctions elliptiques“, p. 688, 1875).

3) Въ сочиненіи Bertrand'a „Traité de calcul intégral“, 1870, p. 66 приводится интегралъ

$$\int \frac{Fx dx}{\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3}}$$

зависящій отъ уравненія

$$y^2 - (a + bx + cx^2 + dx^3) = 0.$$

Графически интегралъ представится на чертежѣ V.

Изъ чертежа видно, что не только данный интегралъ,

но также интегралы болѣе общіе, зависящіе отъ уравненія

$$y^3 + (\alpha + \beta x)y^2 + (\alpha' + \beta'x + \gamma'x^2)y + \alpha'' + \beta''x + \gamma''x^2 + \delta x^3 = 0,$$

приводятся къ эллиптическимъ.

4) Разсмотримъ наконѣцъ гиперэллиптическія интегралы, зависящіе отъ уравненія

$$\chi(x, y) = y^2 - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{p+1}x^{p+1}).$$

Графически это уравненіе представится на чертежѣ VI. Здѣсь имѣемъ

$$OC = 2, \quad OO' = O'C = O'O' = 1, \quad AO = 2p + 1,$$

$$O'B = p + \frac{1}{2}, \quad O'D < 1.$$

А потому число точекъ, лежащихъ въ углѣ  $\eta'O'\xi'$ , равно  $p$ , слѣдовательно имѣемъ  $p$  независимыхъ интеграловъ перваго вида. Простѣйшая форма  $\theta y$  есть

$$\theta y = y + (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots + lx^p).$$

10. До сихъ поръ мы не выходили изъ круга вопросовъ, поставленныхъ и рѣшенныхъ Абелемъ, т. е. предполагали, что кривая

$$\chi(x, y) = 0$$

не имѣетъ кратныхъ точекъ въ вѣчнономъ разстояніи отъ начала координатъ. Теперь мы предположимъ, что кривая обладаетъ вратными точками. Известно, что кратныя точки бываютъ двухъ родовъ: кратныя точки съ обособленными касательными (*tangentes séparées*) и кратныя точки съ совпадающими касательными (*tangentes confondues*).

Предположимъ, что кривая обладаетъ вратными точками съ обособленными касательными (*tangentes séparées*). Примемъ въ разсмотрѣнію одну изъ таковыхъ точекъ, которой координаты

$$x = a, \quad y = b;$$

пусть въ этой точкѣ кривая имѣетъ кратность  $i$ -го порядка. По перенесеніи начала координатъ въ точку  $(a, b)$  уравненіе (1) приметъ видъ

$$\chi(x+a, y+b) = A_{i,0}x^i + A_{i-1,1}x^{i-1}y + \dots + A_{0,i}y^i + \dots = 0,$$

гдѣ многочлѣмъ обозначены члены степени выше  $i$ -й.

А потому

$$\chi'_y(x+a, y+b) = B_{i-1,0}x^{i-1} + \dots + B_{0,i-1}y^{i-1} + \dots,$$

т. е.  $\chi'_y(x+a, y+b)$  имѣетъ въ точкѣ  $(a, b)$  кратность  $(i-1)$ -го порядка. Такъ какъ въ сопредѣльности съ кратной точкой  $(a, b)$   $y$  есть монодромная функція  $x^a$ , то, чтобы интегралъ

$$\int \frac{f_1(x, y)}{\chi'_y(x, y)} dx$$

сохранялъ конечное значеніе въ точкѣ  $(a, b)$  нужно, чтобы функція  $f_1(x, y)$  имѣла въ той же точкѣ кратность  $(i-1)$ -го порядка. Но, чтобы функція  $f_1(x, y)$  имѣла требуемую кратность, коэффициенты ея должны удовлетворять числу

$$1 + 2 + 3 + \dots + i-1 = \frac{i(i-1)}{2}$$

условій. Отсюда слѣдуетъ, что число абелевыхъ интеграловъ перваго вида, подъ вліяніемъ кратной точки  $i$ -го порядка, уменьшается на

$$\frac{i(i-1)}{2}.$$

Если такихъ точекъ  $\alpha_i$ , то число  $\gamma$  уменьшится на

$$\alpha_i \frac{i(i-1)}{2}.$$

Полагая, что кривая

$$\chi(x, y) = 0$$

имѣетъ  $\alpha$ , двойныхъ точекъ,  $\alpha_1$  трѣйныхъ, и т. д., имѣемъ

для числа независимых Абелевых интегралов формулу

$$p = \gamma - \sum \alpha_i \frac{i(i-1)}{2}.$$

Число  $p$  введено въ анализъ Риманномъ и называется *родомъ* (genre) кривой. Риманъ вмѣстѣ съ симъ далъ знаменитую теорему, известную подъ именемъ *закона сохранения рода* (loi de la conservation du genre). Теорема эта заключается въ томъ, что если преобразовать кривую  $\chi(x, y) = 0$  въ новую кривую  $\Phi(x', y') = 0$  такимъ образомъ, что каждой точкѣ первой кривой будетъ соответствовать только одна точка второй кривой, и обратно: каждой точкѣ второй кривой будетъ соответствовать только одна точка первой кривой; то обѣ кривыя характеризуются принадлежностію къ одному и тому же роду. Теорема эта доказана многими геометрами для того случая, когда кривая обладаетъ кратными точками съ обособленными касательными, а также точками *возврата* (rebroussement). Нѣсколько доказательствъ этой теоремы можно найти въ соч. Salmon, „Traité de Geometrie Analytique, Courbes planes“, 1884, а также „Leçons sur la Geometrie par Alfred Clebsch“. Простѣйшее доказательство принадлежитъ Zeuten'у <sup>1)</sup>. Распространеніе теоремы Римана на особенныя точки всякаго порядка принадлежитъ Halphen'у. Къ числу преобразованій, не измѣняющихъ рода кривой, относится: 1) преобразование гомографическое, 2) биквадратическое и 3) бираціональное или преобразование *Cremona*. Теорія этихъ преобразованій подробно изложена въ вышеупомянутыхъ сочиненіяхъ. Пользуясь рядомъ биквадратическихъ преобразованій, Nöther показалъ, что можно кривую, обладающую кратными точками съ совпадающими касательными замѣнить (преобразовать) кривою того-же рода съ ка-

<sup>1)</sup> Salmon, p. 456, 457, 458.

сательными обособленными. Поэтому въ дальнѣйшемъ мы будемъ имѣть въ виду только кратныя точки этого послѣдняго рода.

Сдѣлавши эти замѣчанія касательно новѣйшихъ открытій, приступимъ къ доказательству теоремы I (§ 6) для того случая, когда кривая обладаетъ кратными точками. Положимъ, что кривая  $\chi(x, y)$  имѣетъ въ точкѣ  $(a, b)$  кратность  $i$ -го порядка. Заставимъ кривую  $\theta y$  имѣть въ этой же точкѣ кратность  $(i-1)$ -го порядка; тогда въ точкѣ  $(a, b)$  кривыя

$\chi(x, y) = 0$  и  $\theta(y) = 0$   
будутъ имѣть

$$i(i-1)$$

общихъ точекъ. Слѣдовательно, подъ вліяніемъ кратной точки  $(a, b)$  число  $\mu$  измѣнится въ

$$\mu - i(i-1).$$

Если кривая  $\chi(x, y) = 0$  имѣетъ  $\alpha_1$  двойныхъ точекъ,  $\alpha_2$  — тройныхъ, и т. д., то число  $\mu'$  неопредѣленныхъ точекъ пересѣченія выразится формулою

$$\mu' = \mu - \sum \alpha_i \cdot i(i-1).$$

Число произвольныхъ коэффициентовъ функціи  $\theta y$ , которое мы назвали черезъ  $\alpha$ , также измѣнится. Такъ какъ кривая  $\theta y$  проходитъ черезъ  $\alpha_1$  простыхъ точекъ,  $\alpha_2$  двойныхъ точекъ, . . . .  $\alpha_i$  точекъ  $(i-1)$ -й кратности, то число условій, которымъ должны удовлетворять ея коэффициенты, выразится формулою

$$\frac{1}{2} \sum \alpha_i \cdot i(i-1).$$

А потому число произвольныхъ коэффициентовъ  $\alpha'$  будетъ

$$\alpha' = \alpha - \frac{1}{2} \sum \alpha_i \cdot i(i-1);$$

слѣдовательно

$$\mu' - \alpha' = \mu - \alpha - \frac{1}{2} \sum \alpha_i \cdot i(i-1), \text{ или}$$

$$\mu' - \alpha' = \gamma - \frac{1}{2} \sum \alpha_i \cdot i(i-1), \text{ или}$$

$$\mu' - \alpha' = p.$$

И такъ всегда  $\mu - \alpha$  равно числу независимыхъ интеграловъ перваго вида.

12. Число независимыхъ періодовъ. Между числомъ независимыхъ интеграловъ и числомъ независимыхъ періодовъ существуетъ замѣчательное соотношеніе, которые мы сейчасъ обнаружимъ. По теоріи Puiseux критическія точки уравненія

$$\chi(x, y) = 0$$

суть точки пересѣченія кривой  $\chi(x, y) = 0$  съ кривой  $\frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} = 0$ . Легко обнаружить геометрическое значеніе послѣдняго уравненія. Уравненіе касательной къ кривой  $\chi(x, y) = 0$  есть

$$Y - y = - \frac{\frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial \chi}{\partial y}} (X - x), \text{ или}$$

$$(Y - y) \frac{\partial \chi}{\partial y} + (X - x) \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0, \text{ или}$$

$$X \frac{\partial \chi}{\partial x} + Y \frac{\partial \chi}{\partial y} = x \frac{\partial \chi}{\partial x} + y \frac{\partial \chi}{\partial y} \dots \dots (7)$$

Если  $X$  и  $Y$  разсматривать какъ постоянныя, а  $x$  и  $y$  какъ переменныя, то (7) уравненіе представить первую полярю кривой  $\chi(x, y) = 0$ , а  $X$  и  $Y$  суть координаты полюса. Возьмемъ полюсъ на оси  $Y$  и на бесконечности. Тогда  $X = 0$ ;  $Y = \infty$ , и уравненіе (7) представится въ видѣ

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = 0.$$

И такъ  $\frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} = 0$  есть поляръ безконечно удаленной точки, лежащей на оси  $Y$ . Следовательно критическія точки суть точки касанія касательныхъ, проведенныхъ къ данной кривой изъ безконечно удаленной точки, лежащей на оси  $Y$ . Но касательныя, пересѣкающіяся на безконечности и на оси  $y$ , параллельны оси  $y$ . Отсюда слѣдуетъ, что критическія точки алгебраической функции  $y$  суть точки касанія касательныхъ, проведенныхъ къ кривой, параллельно оси  $y$ . Но поляръ всякой точки проходитъ черезъ кратныя точки кривой <sup>1)</sup>, и если кривая имѣетъ кратность  $i$ -го порядка, то первая поляръ имѣетъ въ этой точкѣ кратность  $(i-1)$ -го порядка; следовательно между точками пересѣченія кривыхъ  $\chi(x, y) = 0$  и  $\chi_y'(x, y) = 0$  должно быть  $\sum a_i i(i-1)$  точекъ, которыя не могутъ быть критическими, ибо въ соприкосновенности съ кратною точкою съ обособленными касательными  $y$  есть монодромная функція  $\varphi$ . Называя число точекъ пересѣченія кривыхъ  $\chi(x, y) = 0$ ,  $\chi_y'(x, y) = 0$  черезъ  $D$ , имѣемъ критическихъ точекъ только

$$D' = D - \sum a_i i(i-1) \dots \dots \dots (8)$$

Въ точкахъ пересѣченія кривой съ ея первою полярю, вообще говоря, могутъ быть проводимы только обыкновенныя касательныя, т. е. касательныя, имѣющія съ кривою соприкосновеніе *перваго* порядка. Если бы оказалось, что нѣкоторыя изъ касательныхъ имѣютъ съ кривою соприкосновеніе выше перваго порядка, то, путемъ *гомографическаго преобразованія*, легко всѣ эти случаи устранить. Это устраненіе слѣдуетъ совершенно яснымъ изъ слѣдующаго разсужденія. Число точекъ, въ которыхъ касательная имѣетъ съ кривою соприкосновеніе выше перваго порядка, всегда ограничено;

<sup>1)</sup> Salmon, courbes planes, p. 74, 1884.

примѣромъ могутъ служить точки *перелома* (points d'inflexion); число этихъ точекъ равно числу точекъ пересѣченія данной кривой съ ея *Гессевскимъ* ковариантомъ. И такъ число *особенныхъ* касательныхъ ограничено. Имѣя это въ виду, проведемъ черезъ начало координатъ линіи параллельныя этимъ *особеннымъ* касательнымъ. Если окажется, что ось  $y$  совпадаетъ съ одной изъ нихъ, то выберемъ для этой оси такое направленіе, чтобы оно не совпадало ни съ одной изъ *особенныхъ* касательныхъ. Выбравъ это направленіе для оси  $y$ , преобразуемъ кривую  $\chi(x, y) = 0$  къ новой оси  $y$ . Положимъ, что это преобразование уже сдѣлано. Тогда всѣ касательныя, счетомъ  $D$ , будутъ имѣть съ кривою сопряженіе перваго порядка. Значитъ, перенеся начало координатъ въ любую критическую точку, оставляя оси себѣ параллельными, получимъ уравненіе  $\chi(x, y) = 0$  въ такой формѣ

$$x + ay^2 + x. \Psi(x, y) = 0.$$

Отсюда видно, что каждая критическая точка перемѣщаетъ только два корня, а потому даетъ начало только одному періоду. Легко теперь опредѣлить число періодовъ. Ясно, что  $D$  есть число точекъ пересѣченія  $\chi(x, y) = 0$  и  $\chi'_y(x, y)$ . Такъ какъ  $\chi'_y(x, y)$  подобна  $\theta_y$ , то

$$D = h\theta y' + h\theta y'' + h\theta y''' + \dots + h\theta y^{(n)};$$

следовательно

$$\begin{aligned} D' = & m'n'(n'\mu' - 1) + 2(n''\mu'' + n'''\mu''' + \dots + n^\varepsilon\mu^\varepsilon)m'n' + \\ & + m''n''(n''\mu'' - 1) + 2(n'''\mu''' + \dots + n^\varepsilon\mu^\varepsilon)m''n'' + \\ & + \dots + m^\varepsilon n^\varepsilon(n^\varepsilon\mu^\varepsilon - 1) + 2n^\varepsilon\mu^\varepsilon m^{\varepsilon-1} n^{\varepsilon-1} - \sum \alpha_i i(i-1); \end{aligned}$$

Для опредѣленія числа  $P$  періодовъ замѣтимъ, что безконечность есть критическая точка, перемѣщающая  $n$  корней;

эти корни дают круговыя системы порядковъ

$$\mu', \mu'', \mu''', \dots, \mu^\varepsilon;$$

такъ что на безконечности имѣемъ  $n'$  группъ порядка  $\mu'$ ,  $n''$  группъ порядка  $\mu''$ , и т. д., наконецъ  $n^\varepsilon$  группъ порядка  $\mu^\varepsilon$ . А потому на безконечности имѣемъ періодовъ

$$n'(\mu' - 1) + n''(\mu'' - 1) + \dots + n^\varepsilon(\mu^\varepsilon - 1) = \sum n^\varepsilon(\mu^\varepsilon - 1);$$

всего періодовъ будетъ

$$D' + \sum n^\varepsilon(\mu^\varepsilon - 1).$$

Но изъ этого числа нужно вычесть: 1)  $n - 1$  — число соответствующее числу основныхъ узловъ, 2)  $n - 1$  число зависимостей между періодами; всего надо вычесть  $2n - 2$ ; а потому число періодовъ опредѣлится формулою

$$\begin{aligned} P &= D + \sum n^\varepsilon(\mu^\varepsilon - 1) - 2n + 2 - \sum \alpha_i \cdot i(i-1) \\ &= D - \sum n^\varepsilon(\mu^\varepsilon + 1) + 2 - \sum \alpha_i \cdot i(i-1), \text{ или} \\ \frac{1}{2} P &= n'm' \frac{(m'n' - 1)}{2} + n''\mu'' \left( \frac{m''n'' - 1}{2} + \mu'n' \right) + \\ &+ n'''\mu''' \left( \frac{m'''n''' - 1}{2} + m'n' + m''n'' \right) + \dots + \\ &+ n^\varepsilon\mu^\varepsilon \left( \frac{m^\varepsilon n^\varepsilon - 1}{2} + m'n' + m''n'' + \dots + m^{\varepsilon-1}n^{\varepsilon-1} \right) - \\ &\frac{n'(m' + 1)}{2} - \frac{n''(\mu'' + 1)}{2} - \dots - \frac{n^\varepsilon(\mu^\varepsilon + 1)}{2} + 1 - \sum \alpha_i \frac{i(i-1)}{2} \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{2} P = \gamma - \sum \alpha_i \frac{i(i-1)}{2},$$

или

$$P = 2p;$$

такимъ образомъ получаемъ замѣчательный законъ: Число періодовъ абелева интеграла перваго вида равно числу независимыхъ интеграловъ перваго вида.

13) Въ виду важности этого закона и связи числа періодовъ съ родомъ кривой даю изложенному закону еще

одно толкованіе геометрическаго характера. Посредствомъ гомографическаго преобразованія легко достигнуть того, что безконечность не будетъ критической точкой кривой; графически, на чертежѣ I, это преобразование выразится тѣмъ, что ломаная линія  $A_0 A_1 \dots B_c$  обратится въ прямую, равно наклоненную къ осямъ координатъ, тогда кривая  $\chi(x, y) = 0$  будетъ одной и той же степени относительно  $x$  и  $y$ . Число касательныхъ, проведенныхъ къ кривой изъ безконечно удаленной на оси  $y$  точки будетъ равно классу кривой  $\chi(x, y) = 0$ ; значить число критическихъ точекъ второго порядка выразится формулою

$$n(n-1) - \sum \alpha_i i(i-1)$$

Число  $P$  періодовъ будетъ

$$P = n(n-1) - 2(n-1) - \sum \alpha_i i(i-1), \text{ или}$$

$$P = (n-1)(n-2) - \sum \alpha_i i(i-1),$$

$$\frac{P}{2} = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2} \sum \alpha_i i(i-1), \text{ или}$$

$$\frac{P}{2} = R$$

$$P = 2p.$$

*Примѣчаніе.* Теорія особенныхъ точекъ, теорія поляръ и теорія преобразованій алгебраическихъ кривыхъ очень хорошо изложены въ вышеупомянутыхъ сочиненіяхъ по Геометріи; изложенію Salmon'a можно отдать предпочтеніе, какъ по причинѣ большей сжатости, такъ и потому, что изложеніе Clebsch'a поставлено въ зависимость отъ символическаго изображенія инвариантовъ и ковариантовъ, требующаго много времени для усвоенія. Свѣдѣнія о періодахъ можно почерпнуть изъ „Théorie des fonctions elliptiques“ Брю и Буке, 1875.

(Продолженіе слѣдуетъ).

И. Долбя.

# ИЗЪ ТЕОРИИ АБЕЛЕВЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

## Глава II.

### Связь между періодами. Нормальные періоды.

При изученіи теоріи абелевыхъ функций можно, какъ мы видѣли, ограничиться разсмотрѣніемъ только того случая, когда основное неприводимое алгебраическое уравненіе обладаетъ критическими точками втораго порядка; можно, кромѣ того, преобразовать уравненіе такъ, что бесконечность не будетъ критической точкой. Мы будемъ заниматься абелевыми интегралами перваго вида, т. е. интегралами, сохраняющими конечное значеніе на всей поверхности шара. Положимъ, что абелевы интегралы зависятъ отъ неприводимаго алгебраическаго уравненія

$$f(x, y) = 0,$$

которое обладаетъ критическими точками только втораго порядка.

Около каждой изъ этихъ точекъ перемѣщаются только два изъ числа  $n$  корней уравненія. Въ каждомъ узлѣ (lacet) мы будемъ различать начало и конецъ; такимъ образомъ начало узла ( $b$ ) (черт. VII) есть точка  $O$ , конецъ—точка  $O'$ ; излишнее присовокуплять, что точки  $O_1, O'_1, O_2, O'_2, \dots$  предполагаются бесконечно-близкими, или, если угодно, совпадающими съ началомъ координатъ. Тѣмъ не менѣе, для большей опредѣлительности, мы будемъ принимать за начало координатъ

точку  $O_1$  и будемъ предполагать, что комплексная переменная всегда движется въ одномъ и томъ же направленіи, показанномъ на чертежѣ стрѣлками; это направленіе будемъ считать положительнымъ. Основное свойство алгебраической функціи  $y$  заключается въ томъ, что если выйти изъ начала координатъ  $O_1$  и двигаться послѣдовательно въ одномъ направленіи по периметрамъ всѣхъ узловъ, то возвратимся въ начало координатъ съ тѣмъ же корнемъ, съ какимъ вышли. Безграничную плоскость, на которой функція  $y_1$ , измѣняясь непрерывно по всѣмъ элементарнымъ контурамъ, въ одномъ и томъ же направленіи (въ нашемъ изслѣдованіи это направленіе будетъ всегда обратно часовой стрѣлкѣ), приходитъ въ начало координатъ съ тѣмъ же самымъ значеніемъ  $y_1$ , назовемъ *первымъ листомъ*; плоскость, имѣющую тоже значеніе для  $y_1$ , назовемъ *вторымъ листомъ*; вообще плоскость, имѣющую вышеупомянутое значеніе для  $y_k$ , назовемъ *k-мъ листомъ*. Листы эти, если угодно, мы можемъ предполагать наложенными другъ на друга, какъ въ системѣ Римана, но слово листъ мы употребляемъ въ смыслѣ термина, не соединяя съ этимъ словомъ никакого матеріальнаго значенія.

Если, послѣ прохожденія комплексною переменною даннаго узла, функція  $y$  возвращается въ начало координатъ (конецъ узла) съ новымъ значеніемъ,—будемъ называть узелъ *активнымъ*; если же, при тѣхъ же условіяхъ, функція не мѣняетъ своего значенія,—то будемъ называть узелъ *пассивнымъ*. Если около критической точки, напримѣръ  $c$ , перемѣщается два корня,  $y_1$  и  $y_2$ , то узелъ ( $c$ ) играетъ активную роль на двухъ листахъ. Чтобы опредѣлить номера этихъ листовъ, надо поступить слѣдующимъ образомъ. Выйдемъ изъ начала  $O_1$  узла ( $c$ ) съ корнемъ  $y_1$  и будемъ двигаться въ положительномъ направленіи до тѣхъ поръ пока придемъ въ начало координатъ  $O_1$ . Если мы въ точку  $O_1$  придемъ

съ корнемъ  $y_i$ , то узелъ (с) съ корнемъ  $y_i$ , или указателемъ  $i$ , принадлежитъ листу съ номеромъ  $i$ . Засимъ выйдемъ изъ точки  $O$ , (начала узла (с), съ корнемъ  $y_k$  и будемъ двигаться въ положительномъ направленіи до начала координатъ  $O_1$ . Если мы пришли въ точку  $O_1$  съ корнемъ  $y_k$ , то узелъ (с), указателемъ  $k$ , принадлежитъ листу  $k$ . Только что обнаруженное свойство узловъ, заключающееся въ принадлежности каждаго узла двумъ различнымъ листамъ, влечетъ за собою свойство еще важнѣйшее, которое мы сначала постараемся пояснить примѣромъ. Положимъ, что узелъ (с) перемѣщаетъ два корня  $y_i$  и  $y_k$ , а потому своими указателями принадлежитъ двумъ листамъ  $i$  и  $k$ . Отправимся изъ начала координатъ  $O_1$  съ корнемъ  $y_i$ ; тогда придемъ въ точку  $O$  съ корнемъ  $y_i$ ; засимъ слѣдовало бы пройти узелъ

$$(C)_i^k,$$

и тогда функція, въ точкѣ  $O'$ , пріобрѣтетъ значеніе  $y_k$ . Если же отъ точки  $O$  прямо перейти въ точку  $O_1$  не описывая узла

$$(C)_i^k,$$

то въ точку  $O'$  мы придемъ съ корнемъ  $y_i$ , а не съ корнемъ  $y_k$ , какъ бы слѣдовало. Но выйти изъ узла (с) съ корнемъ  $y_i$ —все равно, что войти въ него съ корнемъ  $y_k$ , а такъ какъ указателемъ  $k$  узелъ (с) принадлежитъ листу ( $k$ ), то пропускъ активнаго узла  $(C)_i^k$  равносильнъ переходу въ новый листъ. Отсюда дѣлаемъ такой выводъ:

**Теорема II.** Если въ томъ мѣстѣ, гдѣ лежитъ критическая точка (напримѣръ с) сдѣлать разрѣзъ двухъ листовъ  $i$  и  $k$ , такъ, чтобы критическая точка исчезла навсегда, и если начать движеніе въ точкѣ  $O_1$  съ корнемъ  $y_i$ , то, при

прохожденіи черезъ разрѣзъ,  $y$  не перемѣнитъ своего значенія, а только движеніе перейдетъ въ новый листъ.

**Теорема III.** Если выйти изъ начала координатъ  $O$ , съ какимъ нибудь корнемъ уравненія и двигаться по направленію обратному часовой стрѣлкѣ, переходя послѣдовательно отъ одного узла къ другому; то можно выбрать такіе узлы, полнымъ уничтоженіемъ которыхъ достигнется непрерывный переходъ отъ листа къ листу до тѣхъ поръ, пока не будутъ исчерпаны всѣ листы; послѣ чего совершится переходъ отъ послѣдняго листа въ первому; при чемъ придется сдѣлать столько полныхъ оборотовъ, сколько было листовъ и образовать столько разрѣзовъ, сколько было листовъ безъ одного; каждый листъ; при этомъ движеніи, мы пройдемъ цѣликомъ и только одинъ разъ.

**Доказательство.** Пусть точка  $O$  (Черт. VIII) начало координатъ, точка  $M$  есть первая критическая точка, которую должна обойти комплексная перемѣнная (точка  $M$  берется совершенно произвольно).

Положимъ, что движеніе началось въ листѣ  $A$ , слѣдовательно изъ начала координатъ вышли съ корнемъ  $y_A$  и начали двигаться въ положительномъ направленіи. Изъ множества активныхъ узловъ, принадлежащихъ листу  $A$ , выбираемъ, *по произволу*, одинъ для образованія перваго разрѣза. Положимъ, что намѣченный къ разрѣзу узелъ играетъ активную роль на двухъ листахъ  $A$  и  $B$ ; пусть этотъ узелъ есть

$$a(A, B);$$

разрѣжемъ два листа  $A$  и  $B$  по безконечной линіи  $Oa$ . Тогда, при непрерывномъ движеніи комплексной перемѣнной, въ листѣ  $A$  мы опишемъ острый уголъ  $\angle MOa$ . и, черезъ разрѣзъ  $Oa$ , перейдемъ въ листъ  $B$ . Второй разъ

рѣзъ долженъ служить для перехода въ новый листъ; въ новый листъ можно перейти либо изъ листа *A*, либо изъ листа *B*: это вполне зависитъ отъ нашего произвола. Если мы пожелаемъ совершить переходъ въ новый листъ изъ листа *A*, то, совершивши первый оборотъ, мы придемъ въ начало координатъ съ корнемъ  $\psi_B$ ; второй оборотъ начнется въ листѣ *B* и придется въ этомъ листѣ описать уголъ *MOa* до разрѣза *Oa*; черезъ этотъ разрѣзъ перейдемъ опять въ листъ *A* и, черезъ новый разрѣзъ, совершимъ переходъ въ новый листъ изъ листа *A*, какъ желали, во время второго оборота. Если же мы желаемъ совершить переходъ въ новый листъ изъ листа *B*, то переходъ этотъ долженъ быть выполненъ во время перваго оборота; тогда нужно сдѣлать второй разрѣзъ въ углу

$$aOM = 2\pi - MOa \quad ^1);$$

такой разрѣзъ у насъ сдѣланъ по линіи *Od*. При существованіи этого разрѣза, переходъ, изъ листа *A* въ новый листъ, достигнется во время перваго оборота. Въ самомъ дѣлѣ черезъ разрѣзъ *Oa* мы перейдемъ въ листъ *B*, а черезъ разрѣзъ *Od* перейдемъ въ листъ *D*; и такъ какъ, на пути, нѣтъ ни одного разрѣза, дающаго переходъ въ новый листъ, то *первый оборотъ* кончится въ началѣ координатъ и въ листѣ *D*, слѣдовательно съ корнемъ  $\psi_D$ . Второй оборотъ начнется въ листѣ *D* и будетъ въ немъ продолжаться до встрѣчи съ разрѣзомъ *Od*, черезъ который движеніе перейдетъ въ листъ *B*. Такъ какъ мы не пожелаемъ совершить переходъ въ новый листъ изъ листа *D*, то должны совершить его изъ листа *B* или изъ листа *A*. На нашемъ чер-

---

<sup>1)</sup> Если впередъ встрѣтится надобность обозначать углы, то мы всегда будемъ обозначать ихъ тремя буквами справа на лѣво; такъ что всегда есть возможность отличить два угла, дополняющіе другъ друга до 360°.

тежѣ переходъ сдѣланъ изъ листа *B*, черезъ разрѣзъ *Of*, въ листъ *F*, гдѣ и кончается *второй оборотъ*. Далѣе слѣдуетъ позаботиться о переходѣ изъ листа *F* въ новый листъ. Если мы, по какимъ нибудь причинамъ, не нашли нужнымъ совершить непосредственный переходъ изъ листа *F* въ новый листъ, то начнемъ третій оборотъ въ листѣ *F*, въ которомъ и будемъ двигаться до встрѣчи съ разрѣзомъ *Of*, черезъ который перейдемъ въ листъ *B*, гдѣ и кончимъ *третій оборотъ*. Во время четвертаго оборота, черезъ разрѣзъ *aO*, перейдемъ въ листъ *A*, а затѣмъ, черезъ разрѣзъ *Ob*, въ листъ *C*; далѣе, черезъ разрѣзъ *Oe*, въ листъ *E*, гдѣ и кончимъ *четвертый оборотъ*. Если нѣтъ больше новыхъ листовъ, то четвертый оборотъ кончится въ листѣ *E*. Во время пятаго оборота, черезъ разрѣзъ *Oe*, перейдемъ въ листъ *C*, гдѣ и кончимъ *пятый оборотъ*. Во время шестаго движенія, черезъ разрѣзъ *Ob*, перейдемъ въ первый листъ, гдѣ и кончимъ *шестой оборотъ*. Всѣхъ листовъ было шесть: *A, B, C, D, E, F*; столько же сдѣлано оборотовъ; разрѣзовъ сдѣлано пять. Движеніе въ какомъ нибудь листѣ начинается отъ разрѣза съ указателемъ этого листа и продолжается до новаго разрѣза съ тѣмъ же указателемъ; кромѣ того движеніе не повторяется въ томъ-же порядкѣ. На этомъ основаніи въ какомъ нибудь листѣ, напримѣръ *B*, движеніе будетъ происходить въ углахъ *aOd*, *dOf* и *fOa*; а всего пройдемъ въ этомъ листѣ

$$aOd + dOf + fOa = 360^\circ.$$

Такимъ образомъ теорема доказана. Для ясности предлагаю примѣръ. Дано девять листовъ, отмѣченныхъ номерами

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Черезъ критическія точки проведены разрѣзы, конхъ порядокъ, при движеніи въ положительномъ направленіи

сѣдующій:

$$a(1, 2), b(1, 3), c(2, 4), d(2, 5), e(3, 9), \\ f(4, 6), g(5, 8), h(1, 7).$$

Въ прилагаемой таблицѣ показаны углы, описанные въ каждомъ листѣ во время каждаго изъ девяти оборотовъ

| №<br>Листа. | 1<br>Обор. | 2<br>Обор. | 3<br>Обор. | 4<br>Обор. | 5<br>Обор. | 6<br>Обор. | 7<br>Обор. | 8<br>Обор. | 9<br>Обор. | Всего<br>продел.<br>въ листѣ |
|-------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------------------------|
| 1           | M0a        | —          | —          | —          | —          | a0b        | —          | b0h        | h0M        | 360°                         |
| 2           | a0c        | —          | c0d        | —          | d0M        | M0a        | —          | —          | —          | 360°                         |
| 3           | —          | —          | —          | —          | —          | b0e        | e0M        | M0b        | —          | 360°                         |
| 4           | c0f        | f0M        | M0c        | —          | —          | —          | —          | —          | —          | 360°                         |
| 5           | —          | —          | d0g        | g0M        | M0d        | —          | —          | —          | —          | 360°                         |
| 6           | f0M        | M0f        | —          | —          | —          | —          | —          | —          | —          | 360°                         |
| 7           | —          | —          | —          | —          | —          | —          | —          | h0M        | M0h        | 360°                         |
| 8           | —          | —          | g0M        | M0g        | —          | —          | —          | —          | —          | 360°                         |
| 9           | —          | —          | —          | —          | —          | e0M        | M0e        | —          | —          | 360°                         |

**Теорема IV.** Возьмемъ два независимыхъ абелевыхъ интеграла перваго вида  $u$  и  $v$ ; если будемъ интегрировать по периметру, который опредѣленъ въ предыдущей теоремѣ, то интеграль

$$\int u \, dv$$

будетъ равенъ нулю.

*Доказательство.* Для доказательства замѣтимъ, что интегралъ

$$\int u \, dv,$$

взятый по совокупности всѣхъ активныхъ узловъ любого листа, въ положительномъ направленіи, равенъ нулю, по теоремѣ Cauchy, такъ какъ безконечность не есть критическая точка функціи  $u$ , отъ которой зависятъ абелевы интегралы  $u$  и  $v$ . Будемъ обозначать интегралъ

$$\int u \, dv,$$

взятый по совокупности активныхъ узловъ перваго листа, черезъ  $H(1)$ , для втораго листа  $H(2)$ , и т. д. тогда имѣемъ

$$H(1) - H(2) - H(3) - \dots - 0.$$

Интегралъ, взятый по части периметра листа, мы будемъ обозначать такъ

$$\int_{\alpha}^{\beta} H(A),$$

гдѣ  $\alpha$  есть указатель того корня, съ которымъ началось интегрированіе,  $\beta$ —указатель того корня, съ которымъ интегрированіе кончилось,  $A$ —указатель листа, въ которомъ интегрированіе производилось. Наконецъ интегралъ, взятый по периметру какого нибудь одного узла, мы будемъ обозначать такъ

$$\alpha\beta(A),$$

гдѣ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $A$  имѣютъ сейчасъ указанное значеніе.

Принявъ въ свѣдѣнію эти обозначенія, положимъ, что имѣется, на примѣръ, пять листовъ и разрѣзы сдѣланы въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$a(1, 2), b(1, 3), c(2, 4), d(2, 5).$$

Положимъ еще, что узелъ (a) перемѣщаетъ два корня съ указателями  $i, k$ ; узелъ (b) перемѣщаетъ корни  $y_l, y_m$ ; узелъ (c) перемѣщаетъ  $y_n, y_p$  и узелъ (d)—корни  $y_q, y_r$ .

Первый оборотъ даетъ для интеграла

$$\int u \, dv$$

значеніе

$$\overset{i}{\underset{1}{H}}(1) + \overset{n}{\underset{i}{H}}(2) + \overset{4}{\underset{n}{H}}(4) \dots \dots \dots (1).$$

Второй оборотъ даетъ

$$\overset{p}{\underset{4}{H}}(4) + \overset{q}{\underset{p}{H}}(2) + \overset{5}{\underset{q}{H}}(5) \dots \dots \dots (2).$$

Третій оборотъ даетъ

$$\overset{r}{\underset{5}{H}}(5) + \overset{2}{\underset{r}{H}}(2) \dots \dots \dots (3).$$

Четвертый оборотъ даетъ

$$\overset{k}{\underset{2}{H}}(2) + \overset{l}{\underset{k}{H}}(1) + \overset{3}{\underset{l}{H}}(3) \dots \dots \dots (4).$$

Наконецъ пятый оборотъ даетъ

$$\overset{m}{\underset{3}{H}}(3) + \overset{1}{\underset{m}{H}}(1) \dots \dots \dots (5).$$

Складываемъ (1), (2), (3), (4), (5); получимъ

$$\begin{aligned} \int u \, dv = & \overset{i}{\underset{1}{H}}(1) + ik(1) + ki(2) + \overset{n}{\underset{i}{H}}(2) + np(2) + \\ & + pn(4) + [\overset{4}{\underset{n}{H}}(4) + \overset{p}{\underset{4}{H}}(4) + pn(4)] + np(2) + \\ & + \overset{q}{\underset{p}{H}}(2) + qr(2) + [rq(5) + \overset{5}{\underset{q}{H}}(5) + \overset{r}{\underset{5}{H}}(5)] + \\ & + rq(5) + qr(2) + \overset{2}{\underset{r}{H}}(2) + \overset{k}{\underset{2}{H}}(2) + ki(2) + ik(1) + \\ & + \overset{l}{\underset{k}{H}}(1) + lm(1) + [ml(3) + \overset{3}{\underset{l}{H}}(3) + \overset{m}{\underset{3}{H}}(3)] + ml(3) + \\ & + lm(1) + \overset{1}{\underset{m}{H}}(1). \end{aligned}$$

Замѣчая, что, по теоремѣ Cauchy,

$$\overset{4}{\underset{n}{H}}(4) + \overset{p}{\underset{4}{H}}(4) + pn(4) = H(4) = 0,$$

$$rq(5) + \overset{s}{\underset{q}{H}}(5) + \overset{r}{\underset{s}{H}}(5) = H(5) = 0,$$

$$ml(3) + \overset{s}{\underset{l}{H}}(3) + \overset{m}{\underset{s}{H}}(3) = H(3) = 0,$$

получимъ

$$\begin{aligned} \int u \, \partial v = & \overset{i}{\underset{1}{H}}(1) + ik(1) + \left[ ki(2) + \overset{n}{\underset{i}{H}}(2) + np(2) + \overset{q}{\underset{p}{H}}(2) + \right. \\ & \left. + qr(2) + \overset{s}{\underset{r}{H}}(2) + \overset{k}{\underset{s}{H}}(2) \right] + \overset{l}{\underset{k}{H}}(1) + lm(1) + \\ & + \overset{1}{\underset{m}{H}}(1). \end{aligned}$$

Замѣчая, что

$$ki(2) + \overset{n}{\underset{i}{H}}(2) + np(2) + \overset{q}{\underset{p}{H}}(2) + qr(2) + \overset{s}{\underset{r}{H}}(2) + \overset{k}{\underset{s}{H}}(2) = 0,$$

получимъ

$$\begin{aligned} \int u \, \partial v = & \overset{i}{\underset{1}{H}}(1) + ik(1) + \overset{l}{\underset{k}{H}}(1) + lm(1) + \overset{1}{\underset{m}{H}}(1) = \\ = & H(1) = 0, \text{ ч. н. с. д.} \end{aligned}$$

17. Доказанныя двѣ теоремы даютъ возможность найти связь между періодами двухъ независимыхъ абелевыхъ интеграловъ перваго вида. Положимъ, что, посредствомъ разрывовъ, обеспеченъ переходъ отъ листа къ листу на основаніи теоремы III. Интеграль

$$\int u \, \partial v$$

по назначенному пути равенъ нулю. Примемъ къ разсмотрѣнію какую нибудь критическую точку  $a$ , перемѣщающую два

корня  $y_\alpha$  и  $y_\beta$ ; пусть узелъ

$$(a)_\beta^\alpha$$

указателемъ  $\alpha$  принадлежитъ листу  $A$ , а указателемъ  $\beta$ — листу  $B$ , что и обозначено на чертежѣ IX.

Положимъ, что, для перехода отъ листа  $A$  къ листу  $B$ , существуетъ два разрѣза: одинъ проведенъ чрезъ критическую точку

$$b_i^k(A, C)$$

и служить для перехода отъ листа  $A$  къ листу  $C$ , а другой проведенъ чрезъ критическую точку

$$c_l^m(B, C)$$

и служить для перехода отъ листа  $C$  къ листу  $B$ . Положимъ, что, совершая процессъ интегрированія, мы раньше перешли въ листъ  $A$ , а потомъ въ листъ  $B$ . Въ то время, когда мы придемъ въ начало координатъ  $O_1$  съ корнемъ  $y_1$ , интегралъ  $u$  имѣетъ нѣкоторое опредѣленное значеніе; назовемъ его чрезъ  $Q$ . Еще будемъ обозначать буквой  $J$  значеніе интеграла  $u$ , снабжая  $J$  указателями, подобно тому, какъ это сдѣлано въ предыдущей теоремѣ для интеграла

$$\int u dv.$$

Кромѣ того назовемъ

$$\int_0^a du_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha^a, \quad \int_0^a du_\beta = \mathfrak{A}_\beta^a.$$

Тогда, описавъ уголъ  $MO_1a$  въ листѣ  $A$ , придемъ въ точку  $O_a$  со значеніемъ

$$u = Q + J_1^a(A).$$

Послѣ прохода комплесною переменною узла

$$(a)_{\alpha}^{\beta}$$

интегралъ

$$\int u dv$$

приобрѣтаетъ значеніе

$$\begin{aligned} \int_0^a [Q + \overset{\alpha}{J}(A) + u_{\alpha}] dv_{\alpha} - \int_0^a [Q + \overset{\alpha}{J}(A) + \mathfrak{U}_{\alpha}^{\alpha} - \mathfrak{U}_{\beta}^{\alpha} + u_{\beta}] dv_{\beta} = \\ = [Q + \overset{\alpha}{J}(A)] \int_0^a dv_{\alpha} - [Q + \overset{\alpha}{J}(A) + \mathfrak{U}_{\alpha}^{\alpha} - \mathfrak{U}_{\beta}^{\alpha}] \int_0^a dv_{\beta} + \\ + \int_0^a u_{\alpha} dv_{\alpha} - \int_0^a u_{\beta} dv_{\beta}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6) \end{aligned}$$

Или, называя

$$\int_0^a dv_{\alpha} = \mathfrak{B}_{\alpha}^a, \quad \int_0^a dv_{\beta} = \mathfrak{B}_{\beta}^a, \quad \mathfrak{U}_{\alpha}^{\alpha} - \mathfrak{U}_{\beta}^{\alpha} = \mathfrak{U}_{\alpha\beta}^a,$$

получимъ для (6) выраженіе

$$[Q + \overset{\alpha}{J}(A)](\mathfrak{B}_{\alpha}^a - \mathfrak{B}_{\beta}^a) - \mathfrak{U}_{\alpha\beta}^a \mathfrak{B}_{\beta}^a + \int_0^a u_{\alpha} dv_{\alpha} - \int_0^a u_{\beta} dv_{\beta} \dots (7)$$

Для той же критической точки въ листѣ  $B$  найдемъ

$$\begin{aligned} [Q + \overset{\alpha}{J}(A) + \mathfrak{U}_{\alpha\beta}^{\alpha} + \overset{i}{J}(A) + \overset{l}{J}(C) + \overset{B}{J}(B) + \overset{\beta}{J}(B)] (\mathfrak{B}_{\beta}^{\alpha} - \mathfrak{B}_{\alpha}^a) - \\ - \mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mathfrak{B}_{\alpha}^a + \int_0^a u_{\beta} dv_{\beta} - \int_0^a u_{\alpha} dv_{\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8) \end{aligned}$$

А такъ какъ узелъ

$$a_{\alpha}^{\beta}(A, B)$$

принадлежитъ только двумъ листамъ  $A$  и  $B$ , то часть интеграла

$$\int u dv,$$

относящаяся до одной критической точки, выразится сум-  
мою (7) и (8), и слѣдовательно будетъ равна

$$\begin{aligned} & \left[ + \mathfrak{U}_{\alpha\beta}^a + \overset{i}{J}_{\beta}(A) + \overset{l}{J}_i(C) + \overset{B}{J}_l(B) + \overset{\beta}{J}_B(B) \right] (\mathfrak{B}_{\beta}^a - \mathfrak{B}_{\alpha}^a) - \\ & \mathfrak{U}_{\alpha\beta}^a \cdot (\mathfrak{B}_{\beta}^a - \mathfrak{B}_{\alpha}^a) - \\ & \left\{ \overset{i}{J}_{\beta}(A) + \overset{l}{J}_i(C) + \overset{B}{J}_l(B) + \overset{\beta}{J}_B(B) \right\} (\mathfrak{B}_{\beta}^a - \mathfrak{B}_{\alpha}^a) \end{aligned}$$

Сумма

$$\overset{i}{J}_{\beta}(A) + \overset{l}{J}_i(C) + \overset{B}{J}_l(B) + \overset{\beta}{J}_B(B),$$

которую назовемъ чрезъ

$$\Omega_{\alpha}$$

образуетъ *periodъ*. Назовемъ еще

$$\mathfrak{B}_{\beta}^a - \mathfrak{B}_{\alpha}^a = \mathfrak{B}_{\beta\alpha}^a;$$

тогда часть интеграла

$$\int u dv,$$

относящаяся до одной критической точки

$$(a)_{\alpha}^{\beta}(A, B)$$

выразится чрезъ

$$\Omega_{\alpha} \mathfrak{B}_{\beta\alpha}^a.$$

Если критическія точки, не считая тѣхъ, чрезъ кото-  
рыя сдѣланы разрѣзы, обозначимъ чрезъ

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_m,$$

то получимъ

$$\int u dv = \sum_{i=1}^{i=m} \Omega_{\alpha_i} \mathfrak{B}_{\beta_i \alpha_i}^{a_i} = 0 \quad . . . . . (9)$$

Теперь надлежитъ позаботиться о томъ, чтобы связь (9) обратить въ связь, содержащую только періоды обоихъ интеграловъ  $u$  и  $v$ . Подобно тому, какъ интегралъ

$$\int dv$$

относительно произвольнаго узла

$$a_{\alpha}^{\beta} (A, B)$$

мы обозначали чрезъ

$$\mathfrak{B}_{\alpha\beta}^a,$$

обозначимъ интегралъ

$$\int du$$

по тому же периметру чрезъ  $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}^a$ .

Разсуждая относительно интеграла

$$\int v du$$

также, какъ мы разсуждали относительно интеграла

$$\int u dv,$$

получимъ

$$\sum_{i=1}^{i=m} E_{\alpha_i} \mathfrak{A}_{\alpha_i \beta_i}^{a_i} = 0;$$

гдѣ періоды

$$E_i$$

составлены изъ  $\mathfrak{B}$  также; какъ  $\Omega_i$  составлены изъ  $\mathfrak{A}$ , а

потому

$$\sum_{i=1}^{i=m} \Omega_{a_i} \mathfrak{P}_{\alpha_i \beta_i}^{a_i} = \sum_{i=1}^{i=m} E_{a_i} \mathfrak{A}_{\alpha_i \beta_i}^{a_i} = 0 \quad (10)$$

Выберемъ теперь рядъ основныхъ узловъ, которые могли бы служить для перехода отъ  $y_1$  ко всѣмъ остальнымъ корнямъ

$$y_1, y_2, \dots y_\alpha, y_\beta, \dots y_n$$

и назовемъ значеніе интеграла  $u$ , взятаго по основнымъ узламъ, соединяющимъ  $y_1$  съ  $y_\alpha$ , черезъ  $U_\alpha$ ; пусть подобное же значеніе для интеграла  $v$  имѣетъ  $V_\alpha$ . Если положимъ

$$\Omega_{a_i} = \mathfrak{A}_{\alpha_i \beta_i}^{a_i} + \mathfrak{A}_{\beta_i \gamma_i}^{b_i} + \dots + \mathfrak{A}_{\omega_i \alpha_i}^{o_i},$$

то можно написать

$$\begin{aligned} \Omega_{a_i} = & \left[ U_{\alpha_i} + \mathfrak{A}_{\alpha_i \beta_i}^{a_i} - U_{\beta_i} \right] + \left[ U_{\beta_i} + \mathfrak{A}_{\beta_i \gamma_i}^{a_i} - U_{\gamma_i} \right] + \dots + \\ & + \left[ U_{\omega_i} + \mathfrak{A}_{\omega_i \alpha_i}^{o_i} - U_{\alpha_i} \right]. \end{aligned}$$

Но тогда каждое количество, забранное въ скобку, вродѣ

$$U_{\alpha_i} + \mathfrak{A}_{\alpha_i \beta_i}^{a_i} - U_{\beta_i}$$

дастъ періодъ <sup>1)</sup>; будемъ его обозначать тѣмъ же символомъ  $\mathfrak{A}$ , поставленнымъ въ скобки:

$$U_{\alpha_i} + \mathfrak{A}_{\alpha_i \beta_i}^{a_i} - U_{\beta_i} = (\mathfrak{A}_{\alpha_i \beta_i}^{a_i}).$$

$\Omega_{a_i}$  есть поэтому не только періодъ, но можетъ быть представлено въ видѣ суммы періодовъ вида

$$(\mathfrak{A}_{\alpha_i \beta_i}^{a_i}).$$

---

<sup>1)</sup> Нбо интегрированіе начинается и кончается съ корнемъ  $y_1$ .

Принимая во вниманіе, что въ уравненіи (10) символы  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  входятъ совершенно одинаковымъ образомъ, а также имѣя въ виду, что равенство не нарушается отъ замѣны символовъ  $\mathfrak{A}$  періодами ( $\mathfrak{A}$ ); заключаемъ, что символы  $\mathfrak{B}$  можно также замѣнить періодами ( $\mathfrak{B}$ ). На этомъ основаніи имѣемъ

$$\sum \Omega a_i (\mathfrak{A}_{\alpha_i \beta_i}^{a_i}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Уравненіе это и даетъ связь между періодами.

18. Особенно любопытно приложеніе доказанныхъ теоремъ къ гиперэллиптическимъ интеграламъ; здѣсь мы сразу получаемъ соотношеніе (11) въ канонической формѣ.

Возьмемъ два интеграла перваго вида

$$u = \int \frac{fx dx}{\sqrt{Rx}}, \quad v = \int \frac{\varphi x dx}{\sqrt{Rx}},$$

гдѣ

$$Rx = (x - a_1) (x - a_2) \dots (x - a_{2p+1}) (x - a_{2p+2});$$

$fx$  и  $\varphi(x)$  суть цѣлыя функціи не выше  $(p-1)$ -й степени.

Положимъ, что критическія точки

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2p+2}$$

расположены на плоскости въ порядкѣ, отмѣченномъ ихъ нумерами. Уравненіе

$$y^2 = Rx$$

имѣетъ только два корня, а потому имѣемъ *два* листа; каждая критическая точка принадлежитъ двумъ листамъ, а потому достаточно сдѣлать *одинъ* разрѣзъ, который нужно провести отъ начала координатъ чрезъ одну какую нибудь критическую точку; проведемъ разрѣзъ  $Oa_{2p+2}$ ; оборотовъ нужно сдѣлать *два*. *Первый* оборотъ даетъ:

1) для критической точки  $a_1$

$$\int_0^{a_1} u dv + \int_0^{a_1} (2A_1 - u) dv = 2A_1 B_1,$$

гдѣ  $A_1 = \int_0^{a_1} du$ ,  $B_1 = \int_0^{a_1} dv$ , такъ и въ дальнѣйшемъ;

2) для критической точки  $a_2$

$$-\int_0^{a_1} (2A_1 - u) dv - \int_0^{a_2} (2A_1 - 2A_2 + u) dv =$$

$$= -4A_1 B_2 + 2A_2 B_2;$$

3) для точки  $a_3$

$$4(A_1 - A_2) B_3 + 2A_3 B_3,$$

4) для точки  $a_4$

$$-4(A_1 - A_2 + A_3) B_4 + 2A_4 B_4,$$

и т. д., наконецъ для точки  $a_{2p+1}$

$$4(A_1 - A_2 + A_3 - \dots - A_{2p}) B_{2p+1} + 2A_{2p+1} B_{2p+1}.$$

Второй оборотъ даетъ:

$$-4(A_1 - A_2 + A_3 - \dots - A_{2p} + A_{2p+1}) B_1 + 2A_1 B_1 -$$

$$-4(A_2 - A_3 + A_4 - \dots + A_{2p} - A_{2p+1}) B_2 + 2A_2 B_2$$

$$-4(A_3 - A_4 + \dots - A_{2p} + A_{2p+1}) B_3 + 2A_3 B_3$$

$$-4(A_4 - A_5 + \dots + A_{2p} - A_{2p+1}) B_4 + 2A_4 B_4$$

$$- \dots$$

$$-4(A_{2p} - A_{2p+1}) B_{2p} + 2A_{2p} B_{2p}$$

Слѣдовательно, послѣ сложения, получимъ

$$\begin{aligned} \int u dv = & -4(A_1 - A_2)B_2 + 4(A_1 - A_2)B_3 - 4(A_1 - A_2)B_4 \\ & + 4(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)B_5 - \\ & - \dots \dots \dots \\ & -4(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \dots + A_{2p-1} - A_{2p})B_{2p} + \\ & + 4(A_1 - A_2 + \dots \dots \dots + A_{2p-1} - A_{2p})B_{2p+1} + \\ & + 4(A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + \dots \dots + A_{2p} - A_{2p+1})B_1 \\ & -4(A_2 - A_3 + \dots \dots \dots + A_{2p} - A_{2p+1})B_2 + \\ & + 4(A_4 - A_5 + \dots \dots \dots + A_{2p} - A_{2p+1})B_3 - \\ & - \dots \dots \dots \\ & -4(A_{2p} - A_{2p+1})B_{2p} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & 4(A_1 - A_2)(B_2 - B_3 + B_4 - B_5 + \dots \dots + B_{2p} - B_{2p+1}) - \\ & -4(B_1 - B_2)(A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + \dots \dots + A_{2p} - A_{2p+1}) + \\ & + 4(A_3 - A_4)(B_4 - B_5 + B_6 - B_7 + \dots \dots + B_{2p} - B_{2p+1}) - \\ & -4(B_3 - B_4)(A_4 - A_5 + A_6 - A_7 + \dots \dots + A_{2p} - A_{2p+1}) + \\ & + \dots \dots \dots \\ & + 4(A_{2p-1} - A_{2p})(B_{2p} - B_{2p+1}) - \\ & -4(B_{2p-1} - B_{2p})(A_{2p} - A_{2p+1}) = 0. \end{aligned}$$

Называя

$$2(A_1 - A_2) = \omega_1, \quad 2(B_1 - B_2) = \varepsilon_1,$$

$$2(A_3 - A_4) = \omega_2, \quad 2(B_3 - B_4) = \varepsilon_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$2(A_{2p-1} - A_{2p}) = \omega_{2p}, \quad 2(B_{2p-1} - B_{2p}) = \varepsilon_{2p};$$

$$2(A_2 - A_3 + \dots \dots \dots + A_{2p} - A_{2p+1}) = \omega_1,$$

$$\begin{aligned}
 2(A_4 - A_5 + \dots + A_{2p} - A_{2p+1}) &= \omega_3, \\
 2(A_6 - A_7 + \dots + A_{2p} - A_{2p+1}) &= \omega_5, \\
 &\dots \\
 2(A_{2p} - A_{2p+1}) &= \omega_{2p-1}; \\
 2(B_2 - B_3 + B_4 - B_5 + \dots + B_{2p} - B_{2p+1}) &= \varepsilon_1, \\
 &\dots \\
 2(B_{2p} - B_{2p+1}) &= \varepsilon_{2p-1},
 \end{aligned}$$

получимъ

$$\sum_{i=1}^{i=p} \{ \omega_{2i-1} \varepsilon_{2i} - \varepsilon_{2i-1} \omega_{2i} \} = 0^1).$$

Въ этой же замѣчательной (канонической формѣ) получаются почти непосредственно соотношенія между періодами всѣхъ абелевыхъ интеграловъ. Для избѣжанія безполезныхъ отвлеченностей разберемъ подробно примѣръ, заимствованный изъ сочиненія Clebsch'a и Gordan'a „Theorie der abelschen Functionen“, 1866. Критическія точки указаны на чертежѣ X; каждая критическая точка снабжена двумя указателями и однимъ номеромъ; номеръ стоитъ на верху; нижніе указатели, обозначенные арабскими цифрами, относятся до корней, перемѣщаемыхъ критическою точкою; два римскихъ указателя забраны въ скобки и относятся до листовъ, которымъ критическія точки принадлежать; такъ что лѣвый арабскій указатель соотвѣтствуетъ лѣвому римскому, и наоборотъ. Разрѣзы сдѣланы чрезъ точки

$$a_{1,}^{a,} (IV, III), a_{2,}^{a,} (II, I), a_{3,}^{a,} (III, I).$$

Взявъ интеграль по поверхности, опредѣленной IV теоремой, получимъ:

---

<sup>1)</sup> Обозначенія заимствованы изъ сочиненія Briot „Théorie des fonctions abéliennes“, 1879.

1) для точки  $a^1_{11}$  (I, II)

$$(u^2_{22} + u^5_{33} + u^{10}_{44}) v^1_{11};$$

2) для точки  $a^2_{22}$  (I, III)

$$(u^5_{33} + u^{10}_{44} + u^1_{11} + u^8_{14} + u^4_{22} + u^9_{22} + u^{11}_{33} + u^{12}_{44}) v^2_{22};$$

3) для точки  $a^3_{14}$  (II, IV)

$$(u^4_{22} + u^9_{33} + u^{11}_{11} + u^{12}_{22} + u^2_{11} + u^4_{22} + u^5_{33} + u^9_{33} + u^{10}_{44} + u^{11}_{44} + u^{12}_{11}) v^3_{11} - (u^2_{22} + u^5_{33} + u^{10}_{44}) v^3_{14};$$

4) для точки  $a^4_{22}$  (III, II)

$$(u^9_{33} + u^{11}_{11} + u^{12}_{22} + u^2_{11}) v^4_{22};$$

5) для точки  $a^5_{33}$  (I, III)

$$(u^{10}_{44} + u^1_{11} + u^8_{14} + u^4_{22} + u^9_{22} + u^{11}_{33} + u^{12}_{44} + u^2_{11} + u^4_{22})$$

6) для точки  $a^9_{22}$  (III, IV)

$$(u^{11}_{11} + u^{12}_{22} + u^2_{11} + u^4_{22} + u^5_{33}) v^9_{22};$$

7) для точки  $a^{10}_{44}$  (II, IV)

$$(u^1_{11} + u^8_{14} + u^{11}_{33} + u^{12}_{44} + u^2_{11} + u^4_{22}) v^{10}_{44};$$

8) для точки  $a^{11}_{33}$  (III, IV)

$$(u^{12}_{44} + u^2_{11} + u^4_{22} + u^5_{33} + u^9_{33} + u^{10}_{44}) v^{11}_{33};$$

9) для точки  $a^{12}_{44}$  (III, IV)

$$(u^2_{11} + u^4_{22} + u^5_{33} + u^9_{33} + u^{10}_{44} + u^{11}_{33}) v^{12}_{44}.$$

Здѣсь каждый изъ символовъ  $u$  и  $v$  можно разсматривать какъ періоды, соответствующіе простымъ цикламъ.

Положимъ, что узлы

$$(a)^2_{11}, (a)^4_{22}, (a)^9_{33}$$

суть основные узлы (lacets fondamentaux); тогда имѣемъ

$$u^2_{11} = u^4_{22} = u^9_{33} = v^1_{11} = v^4_{22} = v^9_{33} = 0.$$

Получимъ соотношеніе между періодами въ формѣ (11):

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{U}^2_{,,} + \mathcal{U}^5_{,,} + \mathcal{U}^{10}_{,,}) \mathfrak{B}^1_{,,} + \\
 & + (\mathcal{U}^1_{,,} + \mathcal{U}^4_{,,} + \mathcal{U}^{10}_{,,} + \mathcal{U}^{11}_{,,} + \mathcal{U}^{12}_{,,}) \mathfrak{B}^2_{,,} + \\
 & + (\mathcal{U}^1_{,,} + \mathcal{U}^2_{,,} + \mathcal{U}^{10}_{,,} + \mathcal{U}^{11}_{,,} + \mathcal{U}^{12}_{,,}) \mathfrak{B}^5_{,,} + \\
 & + (\mathcal{U}^1_{,,} + \mathcal{U}^2_{,,} + \mathcal{U}^5_{,,} + \mathcal{U}^{11}_{,,} + \mathcal{U}^{12}_{,,}) \mathfrak{B}^{10}_{,,} + \\
 & + (\mathcal{U}^2_{,,} + \mathcal{U}^5_{,,} + \mathcal{U}^{10}_{,,} + \mathcal{U}^{12}_{,,}) \mathfrak{B}^{11}_{,,} + \\
 & + (\mathcal{U}^2_{,,} + \mathcal{U}^5_{,,} + \mathcal{U}^{10}_{,,} + \mathcal{U}^{11}_{,,}) \mathfrak{B}^{12}_{,,} = 0 \dots (13)
 \end{aligned}$$

Выраженіе (13) симметрично относительно  $\mathcal{U}$  и  $\mathfrak{B}$ . Первые двѣ строки содержатъ два симметричныхъ члена  $\mathcal{U}^2_{,,} \mathfrak{B}^1_{,,}$ ,  $\mathcal{U}^1_{,,} \mathfrak{B}^2_{,,}$ ; поэтому примемъ первые двѣ строки за исходную точку *преобразования періодовъ къ каноническому виду*. Въ сихъ видахъ составимъ симметричный биномъ

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{U}^1_{,,} + \mathcal{U}^4_{,,} + \mathcal{U}^{10}_{,,} + \mathcal{U}^{11}_{,,} + \mathcal{U}^{12}_{,,}) (\mathfrak{B}^2_{,,} + \mathfrak{B}^5_{,,} + \mathfrak{B}^{10}_{,,}) - \\
 & - (\mathfrak{B}^1_{,,} + \mathfrak{B}^5_{,,} + \mathfrak{B}^{10}_{,,} + \mathfrak{B}^{11}_{,,} + \mathfrak{B}^{12}_{,,}) (\mathcal{U}^2_{,,} + \mathcal{U}^5_{,,} + \mathcal{U}^{10}_{,,}) = \\
 & = \omega_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \omega_2 \dots \dots \dots (14)
 \end{aligned}$$

Вычтемъ (14) изъ (13); въ результатѣ получимъ, очевидно, такую же симметрическую функцію и при томъ число строкъ (13) уменьшится на двѣ единицы. И такъ имѣемъ въ остаткѣ:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{U}^{10}_{,,} \mathfrak{B}^5_{,,} + \mathcal{U}^5_{,,} \mathfrak{B}^{10}_{,,} + \mathcal{U}^{12}_{,,} \mathfrak{B}^{11}_{,,} + \mathcal{U}^{11}_{,,} \mathfrak{B}^{12}_{,,} = \\
 & = (\mathcal{U}^{10}_{,,} \mathfrak{B}^5_{,,} - \mathfrak{B}^{10}_{,,} \mathcal{U}^5_{,,}) + \\
 & + (\mathcal{U}^{12}_{,,} \mathfrak{B}^{11}_{,,} - \mathfrak{B}^{12}_{,,} \mathcal{U}^{11}_{,,}).
 \end{aligned}$$

Имѣемъ поэтому соотношеніе между періодами въ канонической формѣ.

$$\begin{aligned}
 & [\mathcal{U}^1_{,,} + \mathcal{U}^4_{,,} + \mathcal{U}^{10}_{,,} + \mathcal{U}^{11}_{,,} + \mathcal{U}^{12}_{,,}] [\mathfrak{B}^2_{,,} + \mathfrak{B}^5_{,,} + \mathfrak{B}^{10}_{,,}] - \\
 & - [\mathcal{U}^2_{,,} + \mathcal{U}^5_{,,} + \mathcal{U}^{10}_{,,}] [\mathfrak{B}^1_{,,} + \mathfrak{B}^5_{,,} + \mathfrak{B}^{10}_{,,} + \mathfrak{B}^{11}_{,,} + \mathfrak{B}^{12}_{,,}] - \\
 & + [\mathcal{U}^{10}_{,,} \mathfrak{B}^5_{,,} - \mathfrak{B}^{10}_{,,} \mathcal{U}^5_{,,}] + [\mathcal{U}^{12}_{,,} \mathfrak{B}^{11}_{,,} - \mathfrak{B}^{12}_{,,} \mathcal{U}^{11}_{,,}] = 0. (15)
 \end{aligned}$$

Нормальные періоды суть

$$\omega_1 = \mathfrak{A}_{1,2}^1 + \mathfrak{A}_{2,3}^5 + \mathfrak{A}_{3,4}^{10} + \mathfrak{A}_{4,5}^{11} + \mathfrak{A}_{5,6}^{12},$$

$$\omega_2 = \mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{3,4}^6 + \mathfrak{A}_{4,5}^{10},$$

$$\omega_3 = \mathfrak{A}_{3,4}^{10}, \quad \omega_4 = \mathfrak{A}_{4,5}^5, \quad \omega_5 = \mathfrak{A}_{5,6}^{12}, \quad \omega_6 = \mathfrak{A}_{6,1}^{11};$$

$$\varepsilon_1 = \mathfrak{B}_{1,2}^1 + \mathfrak{B}_{2,3}^5 + \mathfrak{B}_{3,4}^{10} + \mathfrak{B}_{4,5}^{11} + \mathfrak{B}_{5,6}^{12},$$

$$\varepsilon_2 = \mathfrak{B}_{2,3}^2 + \mathfrak{B}_{3,4}^6 + \mathfrak{B}_{4,5}^{10},$$

$$\varepsilon_3 = \mathfrak{B}_{3,4}^{10}, \quad \varepsilon_4 = \mathfrak{B}_{4,5}^5, \quad \varepsilon_5 = \mathfrak{B}_{5,6}^{12}, \quad \varepsilon_6 = \mathfrak{B}_{6,1}^{11}.$$

Нетрудно убѣдиться, что каждый изъ періодовъ (13) выразится цѣлою линейною функціею нормальныхъ періодовъ съ коэффициентами  $\pm 1$ . Имѣемъ, очевидно

$$\mathfrak{A}_{1,2}^1 + \mathfrak{A}_{2,3}^5 + \mathfrak{A}_{3,4}^{10} + \mathfrak{A}_{4,5}^{11} + \mathfrak{A}_{5,6}^{12} = \omega_1,$$

$$\mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{3,4}^6 + \mathfrak{A}_{4,5}^{10} = \omega_2,$$

$$\mathfrak{A}_{1,2}^1 + \mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{3,4}^{10} + \mathfrak{A}_{4,5}^{11} + \mathfrak{A}_{5,6}^{12} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3,$$

$$\mathfrak{A}_{1,2}^1 + \mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{3,4}^6 + \mathfrak{A}_{4,5}^{11} + \mathfrak{A}_{5,6}^{12} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_4,$$

$$\mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{3,4}^6 + \mathfrak{A}_{4,5}^{10} + \mathfrak{A}_{5,6}^{12} = \omega_2 + \omega_5,$$

$$\mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{3,4}^6 + \mathfrak{A}_{4,5}^{10} + \mathfrak{A}_{5,6}^{11} = \omega_2 + \omega_6.$$

Можно составить нормальные періоды и другими путями.

Для примѣра положимъ

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{3,4}^6 + \mathfrak{A}_{4,5}^{10} + \mathfrak{A}_{5,6}^{11}) (\mathfrak{B}_{2,3}^2 + \mathfrak{B}_{3,4}^6 + \mathfrak{B}_{4,5}^{10} + \mathfrak{B}_{5,6}^{11}) = \\ & - (\mathfrak{B}_{2,3}^2 + \mathfrak{B}_{3,4}^6 + \mathfrak{B}_{4,5}^{10} + \mathfrak{B}_{5,6}^{11}) (\mathfrak{A}_{2,3}^2 + \mathfrak{A}_{3,4}^6 + \mathfrak{A}_{4,5}^{10} + \mathfrak{A}_{5,6}^{11}) = \\ & - \omega_2 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \omega_2. \end{aligned}$$

Вычитая этотъ биномъ изъ (13), получимъ, вмѣсто шести строкъ, только четыре:

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{A}_{1,2}^1 + \mathfrak{A}_{2,3}^5 + \mathfrak{A}_{3,4}^{10}) \mathfrak{B}_{1,2}^1 + \\ & + (\mathfrak{A}_{1,2}^1 + \mathfrak{A}_{2,3}^5 + \mathfrak{A}_{3,4}^{10}) \mathfrak{B}_{2,3}^2 + \\ & + (\mathfrak{A}_{1,2}^1 + \mathfrak{A}_{2,3}^5 + \mathfrak{A}_{3,4}^{10}) \mathfrak{B}_{3,4}^{10} + \\ & + (\mathfrak{A}_{1,2}^1 + \mathfrak{A}_{2,3}^5 + \mathfrak{A}_{3,4}^{10}) \mathfrak{B}_{4,5}^{11} \dots \dots \dots (16). \end{aligned}$$

Положимъ теперь

$$\begin{aligned} & (\mathcal{U}_{1,2}^1 + \mathcal{U}_{3,4}^5 + \mathcal{U}_{2,4}^{10}) (\mathcal{B}_{2,3}^2 + \mathcal{B}_{3,4}^5 + \mathcal{B}_{1,2}^{10}) - \\ & - (\mathcal{B}_{1,2}^1 + \mathcal{B}_{3,4}^5 + \mathcal{B}_{2,4}^{10}) (\mathcal{U}_{2,3}^2 + \mathcal{U}_{3,4}^5 + \mathcal{U}_{1,2}^{10}) = \\ & = \omega_3 \varepsilon_4 - \varepsilon_3 \omega_4. \end{aligned}$$

Вычитая этотъ биномъ изъ (16), получимъ

$$\mathcal{U}_{3,4}^5 \mathcal{B}_{2,4}^{10} - \mathcal{U}_{2,4}^{10} \mathcal{B}_{3,4}^5 = \omega_3 \varepsilon_6 - \varepsilon_6 \omega_3.$$

Слѣдовательно

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \mathcal{U}_{2,3}^2 + \mathcal{U}_{3,4}^5 + \mathcal{U}_{2,4}^{10} + \mathcal{U}_{1,2}^{12}, \\ \omega_2 &= \mathcal{U}_{2,3}^2 + \mathcal{U}_{3,4}^5 + \mathcal{U}_{2,4}^{10} + \mathcal{U}_{1,4}^{11}, \\ \omega_3 &= \mathcal{U}_{1,2}^1 + \mathcal{U}_{3,4}^5 + \mathcal{U}_{2,4}^{10}, \\ \omega_4 &= \mathcal{U}_{2,3}^2 + \mathcal{U}_{3,4}^5 + \mathcal{U}_{2,4}^{10}, \\ \omega_5 &= \mathcal{U}_{3,4}^5, \quad \omega_6 = \mathcal{U}_{2,4}^{10}. \end{aligned}$$

Періоды (13) выразятся посредствомъ новыхъ нормальныхъ періодовъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{2,3}^2 + \mathcal{U}_{3,4}^5 + \mathcal{U}_{2,4}^{10} &= \omega_4, \\ \mathcal{U}_{1,2}^1 + \mathcal{U}_{3,4}^5 + \mathcal{U}_{2,4}^{10} + \mathcal{U}_{1,4}^{11} + \mathcal{U}_{1,2}^{12} &= -\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \\ \mathcal{U}_{1,2}^1 + \mathcal{U}_{2,3}^2 + \mathcal{U}_{3,4}^5 + \mathcal{U}_{1,4}^{11} + \mathcal{U}_{1,2}^{12} &= \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 - \omega_6; \\ \mathcal{U}_{1,2}^1 + \mathcal{U}_{2,3}^2 + \mathcal{U}_{3,4}^5 + \mathcal{U}_{1,4}^{11} + \mathcal{U}_{1,2}^{12} &= \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5; \\ \mathcal{U}_{2,3}^2 + \mathcal{U}_{3,4}^5 + \mathcal{U}_{2,4}^{10} + \mathcal{U}_{1,2}^{12} &= \omega_1, \\ \mathcal{U}_{2,3}^2 + \mathcal{U}_{3,4}^5 + \mathcal{U}_{2,4}^{10} + \mathcal{U}_{1,4}^{11} &= \omega_2. \end{aligned}$$

Свойство періодовъ, получаемыхъ при непосредственномъ интегрированіи, выражаться цѣлою линейною функціею нормальныхъ періодовъ съ коэффициентами  $\pm 1$  можетъ быть доказано вообще. Въ самомъ дѣлѣ, послѣ интегрированія, получаемъ связь (11) между періодами, которой можно дать



изъ (18), получимъ въ остаткѣ

$$\begin{aligned} & (a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_{i_5}^5 + \alpha_1^5 \omega_1 + \alpha_2^5 \omega_2 + \alpha_3^5 \omega_3 + \alpha_4^5 \omega_4) b^5 + \\ & (a_1^6 + a_2^6 + \dots + a_{i_6}^6 + \alpha_1^6 \omega_1 + \alpha_2^6 \omega_2 + \alpha_3^6 \omega_3 + \alpha_4^6 \omega_4) b^6 + \\ & + \dots \\ & + (a_1^{2p} + a_2^{2p} + \dots + a_{i_{2p}}^{2p} + \alpha_1^{2p} \omega_1 + \alpha_2^{2p} \omega_2 + \alpha_3^{2p} \omega_3 + \\ & + \alpha_4^{2p} \omega_4) b^{2p}. \end{aligned}$$

Продолжая до конца это преобразование, получимъ въ результатѣ

$$\Omega_1 = \omega_1,$$

$$\Omega_2 = \omega_2,$$

$$\Omega_3 = -\alpha_1^3 \omega_1 - \alpha_2^3 \omega_2 + \omega_3,$$

$$\Omega_4 = -\alpha_1^4 \omega_1 - \alpha_2^4 \omega_2 + \omega_4,$$

$$\Omega_5 = -\alpha_1^5 \omega_1 - \alpha_2^5 \omega_2 - \alpha_3^5 \omega_3 - \alpha_4^5 \omega_4 + \omega_5,$$

$$\dots$$

гдѣ  $\Omega_1 = a_1^1 + a^1 + \dots + a_{i_1}^1, \dots$

Вотъ такимъ образомъ, говоря вообще, періоды  $\Omega$  выражаются въ нормальныхъ періодахъ.

(Окончаніе слѣдуетъ).

И. Долбня.



## ИЗЪ ТЕОРИИ АБЕЛЕВЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

### Глава III.

*Приложенія.* Въ тѣсной связи съ настоящимъ изслѣдованіемъ по теоріи абелевыхъ функцій находится вопросъ о приведеніи нѣкоторыхъ алгебраическихъ ирраціональных дифференціаловъ къ эллиптическимъ функціямъ. Вопросъ, на который будетъ обращено вниманіе въ этой главѣ, можетъ возбуждать интересъ съ двухъ сторонъ. Во первыхъ я покажу новое приложеніе метода главы I графическаго опредѣленія рода (genre) алгебраической кривой, каковое опредѣленіе важно въ тѣхъ случаяхъ, когда нужно знать—выражаются ли координаты какой нибудь точки кривой эллиптическими монодромными функціями одного и того же аргумента. Во вторыхъ я покажу новое, не лишнее интереса, приложеніе эллиптическихъ функцій Weierstrass'a къ рѣшенію вопроса объ обращеніи вышеупомянутыхъ интеграловъ. Вопросы, о которыхъ я говорю, затрогивались нѣсколькими писателями. Такимъ образомъ Bertrand въ своемъ „Traité de calcul intégral“ разбираетъ нѣсколько интеграловъ, приводимыхъ къ эллиптическимъ; Serret въ сочиненіи „Cours de calcul intégral“ разбираетъ два любопытныхъ интег-

рала, приводимыхъ къ эллиптическимъ; но съ особенною полнотою вопросы эти изучены Briot и Bouquet въ классическомъ сочиненіи „Théorie des fonctions elliptiques“, гдѣ интересующему насъ вопросу посвящена цѣлая IV глава V книги, озаглавленная слѣдующимъ образомъ: „Intégration par les fonctions elliptiques“. Слѣдуетъ однако замѣтить, что каждый изъ указанныхъ авторовъ рассматриваетъ вопросъ съ особой точки зрѣнія, но за то всѣ достигаютъ приведенія къ эллиптическимъ функціямъ посредствомъ болѣе или менѣе удачныхъ подстановокъ, имѣющихъ бесспорно случайный характеръ. Мы начнемъ съ примѣровъ, находящихся у Briot и Bouquet.

25. Дается дифференціальное уравненіе

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3 = G(u-a)^2(u-b)^2(u-c)^2.$$

Чтобы рѣшить вопросъ о возможности выразить  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial z}$  эллиптическими монодромными функціями одного и того же аргумента  $x$ , назовемъ  $u=x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}=y$ ; имѣемъ между  $x$  и  $y$  алгебраическое уравненіе

$$y^3 = G(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2 \dots \dots \dots (19)$$

Всѣ абелевы интегралы, перваго вида, зависящіе отъ уравненія (19) заключаются въ формулѣ

$$z = \int \frac{f_1(x,y) \partial x}{x'y(x,y)} = \frac{1}{3} \int \frac{f_1(x,y) \partial x}{y^2}$$

и опредѣляются графически при помощи чертежа XI.

Наибольшее число независимыхъ интеграловъ перваго вида равно числу отмѣченныхъ точекъ въ углѣ  $\gamma_1'0''\xi'$ , т. е.

четыремъ; число это подлежитъ сокращенію на слѣдующемъ основаніи. Общій видъ интеграловъ будетъ, очевидно,

$$z = \int \frac{y + \alpha + \beta x + \gamma x^2}{y^3} dx \dots \dots \dots (20)$$

Имѣемъ три критическихъ точки:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Въ точкѣ  $a$  степень  $y$  относительно  $(x-a)$  есть  $\frac{2}{3}$ ; степень знаменателя  $y^3$  есть  $\frac{4}{3}$ ; чтобы  $z$  сохранялъ конечное значеніе въ точкѣ  $a$ , нужно, чтобы полиномъ

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2$$

дѣлился на  $(x-a)$ . Подобнымъ же образомъ полиномъ  $\alpha + \beta x + \gamma x^2$  долженъ дѣлиться на  $(x-b)$  и на  $(x-c)$ ; а потому

$$\alpha = \beta = \gamma = 0,$$

а тогда

$$z = \int \frac{dx}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}};$$

т. е. существуетъ только одинъ независимый интегралъ перваго вида; а потому  $y = \frac{\partial u}{\partial z}$  и  $x = u$  должны выразиться эллиптическими функціями одного и того же аргумента  $z$ . Приступимъ къ нахожденію  $u$  и  $z$ . Возвратимся къ уравненію

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = G(u-a)^2(u-b)^2(u-c)^2.$$

Полагая

$$u-a = \frac{1}{v}, \quad \frac{du}{dz} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dz},$$

приведемъ уравненіе къ виду

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 = G(v-a)^2(v-b)^2 \dots \dots \dots (21)$$

Положимъ, что  $u$  обращается въ безконечность при  $z=0$   
и возьмемъ

$$u = \alpha p^{(n)}z + \varphi z,$$

гдѣ  $\alpha$  численная величина,  $\varphi z$  двоякопериодическая функція, дающая для  $z=0$  безконечность нисшаго порядка сравнительно съ первымъ членомъ  $\alpha p^{(n)}z$ . Уравнивая въ обѣихъ частяхъ уравненія (21), показатели надъ высшими степенями  $\frac{1}{z}$ , имѣемъ, для нахождения  $n$ , условіе

$$3(n+1) = 2(n+2) + 2(n+2),$$

откуда

$$n = 1,$$

$$u = \alpha p'z + \varphi z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha p''z + \varphi'z,$$

а потому

$$(\alpha p''z + \varphi'z)^2 = G(\alpha p'z + \varphi z - a)^2(\alpha p'z + \varphi z - b)^2.$$

Уравнивая въ обѣихъ частяхъ высшіе показатели надъ  $\frac{1}{z}$ , получимъ, для нахождения  $\alpha$ , условіе

$$6^2 \cdot \alpha^2 = 2^4 \cdot \alpha^4 \cdot G;$$

откуда

$$\alpha = \frac{27}{2 \cdot G}.$$

Положимъ, для простоты,  $G = \frac{27}{2}$ , тогда

$$\alpha = 1,$$

и мы имѣемъ

$$(p''z + \varphi'z)^2 = \frac{27}{2}(p'z + \varphi z - a)^2(p'z + \varphi z - b)^2.$$

Легко убѣдиться, что

$$\varphi z = \beta$$

есть постоянная величина; тогда

$$\varphi' z = 0,$$

и мы получимъ

$$(p'' z)^2 = \frac{27}{2} (p' z + \beta - a)^2 (p' z + \beta - b)^2, \text{ или}$$

$$(6p' z - \frac{1}{2} g_1)^2 = \frac{27}{2} \{ p'^2 z + (2\beta - a - b) p' z + (\beta - a)(\beta - b) \}^2.$$

Для того, чтобы по раскрытіи скобокъ, вторая часть, подобно первой, была раціональна относительно  $pz$ , необходимо имѣть

$$2\beta - a - b = 0, \text{ откуда}$$

$$\beta = \frac{a+b}{2}; \quad \beta - a = -(\beta - b);$$

слѣдовательно

$$(6p' z - \frac{1}{2} g_1)^2 = \frac{27}{2} \left\{ 4p'^2 z - g_1 pz - \left( \frac{a-b}{2} \right)^2 \right\}^2$$

Такъ какъ вторая часть, подобно первой, должна состоять только изъ четныхъ степеней  $pz$ , то необходимо имѣть

$$g_1 + \left( \frac{a-b}{2} \right)^2 = 0, \text{ откуда}$$

$$g_1 = - \left( \frac{a-b}{2} \right)^2;$$

тогда

$$(6p' z - \frac{1}{2} g_1)^2 = \frac{27}{2} (4p'^2 z - g_1 pz)^2,$$

отсюда

$$g_1 = 0.$$

А потому

$$p'z = \sqrt{4p^2z + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2},$$

$$u = \frac{a+b}{2} + \sqrt{4p^2z + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

Называя  $pz = \zeta$ , имѣемъ

$$z = \int_{\zeta}^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}},$$

$$u = \frac{a+b}{2} + \sqrt{4\zeta^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

26. Дается дифференціальное уравненіе

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^4 = G(u-a)^2(u-b)^2 \dots \dots \dots (22),$$

или, что все равно, дифференціалъ

$$dz = \frac{du}{\sqrt{G(u-a)^2(u-b)^2}};$$

требуется рѣшить вопросъ о возможности приведенія аргумента  $z$  къ эллиптическимъ интеграламъ и выразить функцію  $u$  явно посредствомъ аргумента  $z$ . Полагая  $u = x$ ,  $\frac{du}{dz} = y$ , изобразимъ на чертежѣ XII алгебраическое уравненіе

$$\chi(x, y) = y^4 - G(x-a)^2(x-b)^2 = 0.$$

Изъ чертежа видно, что имѣется *шесть* интеграловъ вида

$$z = \int \frac{x^2 + (\alpha x + \beta)y + \alpha'x^2 + \beta'x + \gamma}{y^3} dx.$$

Число этотъ подлежитъ уменьшенію на основанія слѣ-

дующихъ соображеній. Въ сопредѣльности съ критической точкой  $x=a$  степень  $y$  относительно  $(x-a)$  равна  $\frac{1}{2}$ ; степень  $y'$  есть  $\frac{3}{2}$ ; для того, чтобы сохранять конечное значеніе въ сопредѣльности съ точкой  $a$  нужно, чтобы полиномъ

$$\alpha'x^2 + \beta'a + \gamma'$$

дѣлился на  $x-a$ . Степень  $y$  относительно  $(x-b)$  въ сопредѣльности съ точкой  $b$  равна  $\frac{3}{4}$ ; степень  $y'$  есть  $\frac{9}{4}$ , а потому полиномъ

$$\alpha'x^2 + \beta'x + \gamma'$$

долженъ дѣлиться на  $(x-b)^2$ . Отсюда слѣдуетъ, что

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = 0,$$

и  $z$  приводится къ виду

$$z = \int \frac{y + \alpha x + \beta}{y'} dx.$$

Подобными же рассужденіями удостовѣримся, что полиномъ

$$\alpha x + \beta$$

долженъ дѣлиться на  $(x-a)(x-b)$ , а потому

$$\alpha = \beta = 0,$$

и  $z$  приводится окончательно къ виду

$$z = \int \frac{y dx}{y'} = \int \frac{dx}{y},$$

т. е. имѣется только одинъ независимый интегралъ перваго вида, значить

$$x = u, \quad y = \frac{du}{dz}$$

могутъ быть выражены аналитическими монодромными функциями одного и того же аргумента.

Чтобы интегрировать уравненіе (22), положимъ  $u = \infty$  при  $z = 0$ ; тогда нужно взять

$$u = \alpha p^{(n)}z + \varphi z,$$

гдѣ  $\alpha$  и  $\varphi z$  имѣютъ вышеупомянутое значеніе.

Для опредѣленія  $n$  имѣемъ условіе

$$2(n+2) + 3(n+2) = 4(n+3),$$

откуда

$$n = 2;$$

значитъ

$$u = \alpha p''z + \varphi z,$$

$$\frac{du}{dz} = \alpha p'''z + \varphi'z,$$

и мы имѣемъ

$$(\alpha p'''z + \varphi'z)^4 = G(\alpha p''z + \varphi z - a)^2(\alpha p''z + \varphi z - b)^2;$$

отсюда

$$24 \cdot \alpha^4 = 6 \cdot G \cdot \alpha^6,$$

слѣдовательно

$$\alpha = \frac{128}{3 \cdot G}.$$

Положимъ, для простоты,  $G = \frac{128}{3}$ , тогда  $\alpha = 1$ , и мы получимъ

$$(p'''z + \varphi'z)^4 = \frac{128}{3}(p''z + \varphi z - a)^2(p''z + \varphi z - b)^2.$$

По предыдущему можно взять

$$\varphi z = \beta,$$

гдѣ  $\beta$  численное количество; значитъ

$$\varphi'z = 0,$$

$$(p'''z)^4 = \frac{128}{3}(p''z + \beta - a)^2(p''z + \beta - b)^2; \text{ или}$$

$$(12pzp'z)^4 = \frac{128}{3}(6p^2z - \frac{1}{2}g_1 + \beta - a)^2(6p^2z - \frac{1}{2}g_1 + \beta - b)^2,$$

или

$$12^4 p^4 z (4p^2 z - g_1, pz - g_1)^2 = \\ = \frac{128}{3} (6p^2 z - \frac{1}{2}g_1 + \beta - a)^2 (6p^2 z - \frac{1}{2}g_1 + \beta - b)^2.$$

Для возможности этого равенства необходимо имѣть

$$g_1 = 0, \quad -\frac{1}{2}g_1 + \beta - b = 0; \text{ тогда будетъ}$$

$$3^2(4p^2z - g_1)^2 = 2^2(6p^2z - \frac{1}{2}g_1 + \beta - a)^2, \text{ или}$$

$$(4p^2z - g_1)^2 = (4p^2z - \frac{1}{3}g_1 + \frac{2(\beta - a)}{3})^2,$$

слѣдовательно

$$g_1 = \frac{1}{3}g_1 - \frac{2(\beta - a)}{3},$$

откуда

$$g_1 = a - \beta,$$

слѣдовательно

$$a - \beta = 2\beta - 2b,$$

$$\beta = \frac{a + 2b}{3},$$

$$g_1 = \frac{2(a - b)}{3},$$

а потому

$$u = 6p^2z - \frac{a - b}{3},$$

$$p'z = \sqrt{4p^2z - \frac{2(a - b)}{3}} pz,$$

аргументъ  $z$  есть эллиптический интегралъ

$$z = \int_{\zeta}^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - \frac{2(a-b)}{3}\zeta}}$$

$$\zeta = pa.$$

27. Дается дифференціальное уравненіе

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G(u-a)^3(u-b)^4 \dots \dots \dots (23),$$

или, что все равно, дифференціалъ

$$dz = \frac{du}{\sqrt[6]{G(u-a)^3(u-b)^4}}.$$

Чтобы рѣшить вопросъ о принадлежности этого дифференціала въ категоріи эллиптическихъ, положимъ  $u = x$ ,  $\frac{du}{dz} = y$  и построимъ на чертежѣ XIII уравненіе

$$\chi(x, y) = y^6 - G(x-a)^3(x-b)^4 = 0.$$

Всѣ абелевы интегралы перваго вида, зависящіе отъ уравненія  $\chi(x, y) = 0$ , заключаются въ формѣ

$$z = \int \left[ \frac{y^4 + (a + \beta x)y^3 + (\alpha' + \beta'x + \gamma'x^2)y^2 + (\alpha'' + \beta''x + \gamma''x^2 + \delta''x^3)y}{y^6} + \frac{(\alpha''' + \beta'''x + \gamma'''x^2 + \delta'''x^3 + \varepsilon'''x^4)}{y^6} \right] dx.$$

Въ сопредѣльности съ критической точкой  $a$  имѣемъ

$$hy^5 = 5hy = \frac{5}{2},$$

а въ сопредѣльности съ точкой  $b$

$$hy^5 = 5hy = \frac{10}{3};$$

слѣдовательно полиномъ

$$\alpha''' + \beta'''x + \gamma'''x^2 + \delta'''x^3 + \varepsilon'''x^4$$

долженъ дѣлиться на

$$(x-a)^2(x-b)^2,$$

а потому

$$\alpha''' = \beta''' = \gamma''' = \delta''' = \varepsilon''' = 0$$

и интегралъ  $z$  приводится къ виду

$$z = \int \frac{y^3 + (\alpha + \beta x)y^2 + (\alpha' + \beta'x + \gamma'x^2)y + (\alpha'' + \beta''x + \gamma''x^2 + \delta''x^3)}{y^4} dx.$$

Въ соприкосновенности съ критической точкой  $a$  имѣемъ

$$hy' = 4hy = 2,$$

въ соприкосновенности съ точкой  $b$

$$hy' = 4hy = \frac{8}{3};$$

слѣдовательно полиномъ

$$\alpha'' + \beta''x + \gamma''x^2 + \delta''x^3$$

долженъ дѣлиться на

$$(x-a)^2(x-b)^2,$$

а потому

$$\alpha'' = \beta'' = \gamma'' = \delta'' = 0;$$

значитъ  $z$  приводится къ виду

$$z = \int \frac{y^3 + (\alpha + \beta x)y + (\alpha' + \beta'x + \gamma'x^2)}{y^3} dx.$$

Въ соприкосновенности съ точкой  $a$

$$hy' = 3hy = \frac{3}{2},$$

въ сопредѣльности съ точкой  $b$

$$hy^2 - 3hy = 2,$$

слѣдовательно

$$\alpha' + \beta'x + \gamma'x^2$$

дѣлится на

$$(x-a)(x-b)^2,$$

а потому

$$\alpha' - \beta' - \gamma' = 0;$$

и приводится къ виду

$$s = \int \frac{y + \alpha + \beta x}{y^2} dx.$$

Въ сопредѣльности съ точкой  $a$

$$hy^2 - 2hy = 1,$$

а въ сопредѣльности съ точкой  $b$

$$hy^2 - 2hy = \frac{4}{3},$$

а потому

$$\alpha + \beta x$$

должно дѣлиться на

$$(x-a)(x-b);$$

значитъ

$$\alpha = 0, \beta = 0;$$

а потому существуетъ только одинъ интегралъ

$$s = \int \frac{dx}{y}$$

перваго вида; значитъ

$$u = x \text{ и } \frac{\partial u}{\partial z} = y$$

могутъ быть выражены эллиптическими монодромными функциями одного и того же аргумента. Приступимъ поэтому къ интегрированію уравненія (23) посредствомъ функций Weierstrass'a. Функцию  $u$  опредѣляемъ дифференціальнымъ уравненіемъ (23) и условіемъ, что  $u$  имѣетъ безконечность при  $z=0$ . Положимъ поэтому

$$u = \alpha p^{(n)}z + \varphi z.$$

Имѣемъ для нахожденія  $n$  условіе

$$6(3+n) = 3(2+n) + 4(2+n);$$

$$n = 4;$$

$$u = \alpha p^{(4)}z + \varphi z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha p^{(4)}z + \varphi'z;$$

$$(\alpha p^{(4)}z + \varphi'z)^6 = G(\alpha p^{(4)}z + \varphi z - a)^3(\alpha p^{(4)}z + \varphi z - b)^4.$$

Имѣемъ для нахожденія  $\alpha$  условіе

$$720^6 \alpha^6 = 120^7 \alpha^7 G, \text{ откуда}$$

$$\alpha = \frac{3^5 \cdot 2^3}{5 \cdot G}$$

Положимъ, для простоты  $G = \frac{3^5 \cdot 2^3}{5}$ , тогда  $\alpha = 1$ , и уравненіе приметъ видъ

$$(p^{(4)}z + \varphi'z)^6 = \frac{2^3 \cdot 3^5}{5} (p^{(4)}z + \varphi z - a)^3 (p^{(4)}z + \varphi z - b)^4.$$

Подобно предыдущему найдемъ, что  $\varphi z$  есть постоянная величина; называя ее черезъ  $\beta$ , получимъ

$$(p^{(4)}z)^6 = \frac{2^3 \cdot 3^5}{5} (p^{(4)}z + \beta - a)^3 (p^{(4)}z + \beta - b)^4, \text{ или}$$

$$36^6 (10p^2 - \frac{1}{2}g_2)^6 (4p^3 - g_2 p - g_3)^3 = \dots$$

$$= \frac{2^3 \cdot 3^3}{5} \left[ 120p^3 - \frac{3}{2} g_1 p - g_3 + \beta - a \right]^3.$$

$$\left[ 120p^3 - \frac{3}{2} g_1 p - g_3 + \beta - b \right]^3; \text{ или}$$

$$5 \left( 10p^3 - \frac{1}{2} g_1 \right)^3 (4p^3 - g_1 p - g_3)^3 =$$

$$2^3 \left[ 10p^3 - \frac{1}{8} g_1 p - \frac{g_3 + a - \beta}{12} \right]^3.$$

$$\left[ 10p^3 - \frac{1}{8} g_1 p - \frac{g_3 + b - \beta}{12} \right]^3.$$

Уравнивая коэффициенты при  $p^3$  въ обѣихъ частяхъ, найдемъ, что  $g_1 = 0$ ; а тогда необходимо

$$g_3 + b - \beta = 0,$$

и мы получимъ

$$5 \cdot 10^3 (4p^3 - g_3)^3 = 2^3 \left( 10p^3 - \frac{g_3 + a - \beta}{12} \right)^3, \text{ или}$$

$$(4p^3 - g_3)^3 = \left( 4p^3 - \frac{g_3 + a - \beta}{30} \right)^3;$$

откуда

$$g_3 = \frac{g_3 + a - \beta}{30}, \text{ или}$$

$$29g_3 = a - \beta, \text{ слѣд.}$$

$$\beta = \frac{a + 29b}{30}, \quad g_3 = \frac{a - b}{30}, \text{ слѣд.}$$

$$p'z = \sqrt{4p^3z - \frac{a - b}{30}};$$

$$u = 120p^3z - 18g_1pz - 12g_3 + \beta = 120p^3z - \frac{2(a - b)}{5} + \frac{a + 29b}{30};$$

$$z = \int_{\zeta}^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - \frac{a - b}{30}}}; \quad u = 120p^3z + \frac{41b - 11a}{30}.$$

28. Хотя изложенная здѣсь метода интегрированія рѣшаетъ вопросъ о приводимости даннаго дифференціала къ эллиптическимъ функціямъ каждый разъ, когда подобное приведеніе возможно; тѣмъ не менѣе мы не ограничимся достигнутыми результатами; мы покажемъ, что графическій методъ распознаванія *рода* кривой вѣрнѣйшимъ и прямымъ путемъ ведетъ въ рѣшенію общаго вопроса, который можно формулировать слѣдующимъ образомъ: изыскать условія необходимыя и достаточныя, чтобы дифференціалъ

$$dz = \frac{du}{\sqrt{G(u-a)^\alpha (u-b)^\beta \dots (u-l)^\lambda}} \dots \dots \dots (24)$$

приводился къ эллиптическимъ функціямъ. Этотъ вопросъ рѣшенъ Briot и Bouquet при помощи теоріи функцій комплекснаго переменнаго. Мы рѣшимъ его независимо отъ этой теоріи, основываясь единственно на графическомъ распознаваніи *рода* алгебраической кривой. Въмѣсто уравненія (24) можно взять

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = G(u-a)^\alpha (u-b)^\beta (u-c)^\gamma \dots (u-l)^\lambda \dots (25)$$

Если  $u$  есть эллиптическая монодромная функція аргумента  $z$ , обращающаяся въ безконечность при  $z=0$ , то въ разложеніи ея по возрастающимъ степенямъ  $z$ , мы будемъ имѣть на первомъ мѣстѣ членъ  $\left(\frac{1}{z}\right)^p$ . Изъ уравненія (25) имѣемъ

$$m(\rho+1) = (\alpha+\beta+\gamma+\dots+\lambda)\rho;$$

откуда

$$\rho = \frac{m}{(\alpha+\beta+\gamma+\dots+\lambda)-m},$$

а такъ какъ  $\rho$  число цѣлое, то

$$\alpha+\beta+\gamma+\dots+\lambda-m$$

есть одинъ изъ дѣлителей  $m$ . Простѣйшее значеніе для  $\rho$  будетъ

$$\rho = 1, \text{ т. е.}$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = 2m. \dots \dots (26)$$

Легко видѣть, что

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda \leq 2m,$$

ибо

$$\rho \geq 1.$$

Полагая въ уравненіи (25) послѣдовательно

$$u \rightarrow a = \frac{1}{v}, \quad u \rightarrow b = \frac{1}{v}, \quad \dots \dots \dots u \rightarrow l = \frac{1}{v}$$

и принимая во вниманіе уравненіе (26), получимъ рядъ преобразованныхъ уравненій

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)^m = A(v-b')^\beta (v-c')^\gamma \dots \dots \dots (v-l')^\lambda,$$

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)^m = B(v-a'')^\alpha (v-c'')^\gamma \dots \dots \dots (v-l'')^\lambda,$$

.....

Отсюда слѣдуетъ, что

$$(\beta + \gamma + \dots + \lambda) = m,$$

$$(\alpha + \gamma + \dots + \lambda) = m,$$

.....

суть дѣлители  $m$  и что можно ограничиться уравненіемъ (25) и условіемъ (26).

Называя  $u = x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = y$ , представимъ уравненіе

$$X(x, y) = y^m - G(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots \dots \dots (x-l)^\lambda = 0. \dots (27)$$

графически на чертежѣ XIV.

Общій видъ абелева интеграла перваго вида, зависящаго отъ уравненія (27), есть

$$z = \int \frac{y^{m-1} + f_2 y^{m-2} + f_4 y^{m-4} + \dots + f_{2m-4}}{y^{m-1}} dx$$

Для того, чтобы  $x$  и  $y$  выражались эллигическими функциями одного и того же аргумента  $z$  необходимо и достаточно, чтобы

$$f_2 x, f_4 x, \dots, f_{2m-4} x (*)$$

были бы равны нулю тождественно, т. е., чтобы всѣ интегралы

$$\int \frac{y + f_2}{y^2} dx, \int \frac{y^2 + f_2 y + f_4}{y^3}, \dots, \int \frac{y^{m-1} + f_2 y^{m-2} + \dots + f_{2m-4}}{y^{m-1}} dx$$

приводились къ одному

$$z = \int \frac{dx}{y}$$

Изъ предыдущихъ разсужденій ясно, что для возможности тождества

$$f_{2m-4} = 0$$

нужно имѣть

$$E(m-1) \frac{\alpha}{m} + E(m-1) \frac{\beta}{m} + \dots + E(m-1) \frac{\lambda}{m} > 2m-4.$$

Такъ какъ  $\frac{\alpha}{m}, \frac{\beta}{m}, \dots, \frac{\lambda}{m}$  правильныя дроби, то

$$(\alpha-1) + (\beta-1) + (\gamma-1) + \dots + (\lambda-1) > 2m-4.$$

А такъ какъ

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = 2m,$$

то, при  $m > 2$ , число показателей  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  не можетъ

---

(\*) Здѣсь указатель функций обозначаетъ ея степень относительно  $x$ .

быть больше трех. И такъ при  $m > 2$  уравненіе (25) должно быть вида

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^m = G(u-a)^\alpha (u-b)^\beta (u-c)^\gamma \dots \quad (28).$$

Для возможности тождества

$$f_{2m-6} = 0$$

нужно имѣть

$$E(m-2)\frac{\alpha}{m} + E(m-2)\frac{\beta}{m} + E(m-2)\frac{\gamma}{m} > 2m-6.$$

Если  $m > 3$ , то по крайней мѣрѣ одна изъ дробей

$$\frac{\alpha}{m}, \frac{\beta}{m}, \frac{\gamma}{m}$$

не можетъ быть больше  $\frac{1}{2}$ ;

Пусть при  $m > 3$  будетъ

$$\frac{\alpha}{m} \text{ не больше } \frac{1}{2} \dots \dots (29)$$

Такъ какъ

$$\alpha + \beta - m = m - \gamma, \quad \beta + \gamma - m = m - \alpha, \quad \alpha + \gamma - m = m - \beta$$

суть дѣлители  $m$ , то  $\alpha, \beta, \gamma$  не меньше  $\frac{m}{2}$ , слѣдовательно

$$\alpha \text{ не меньше } \frac{m}{2}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{\alpha}{m} \text{ не меньше } \frac{1}{2};$$

отсюда слѣдуетъ, что при  $m > 3$  всегда

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{1}{2} \dots \dots (30),$$

$$\alpha = \frac{m}{2},$$

следовательно при  $m > 3$  всегда  $m$  четное; пусть

$$m = 2\mu.$$

Такъ какъ  $\frac{\beta}{m}, \frac{\gamma}{m}$  не меньше  $\frac{1}{2}$ , то можно взять

$$\begin{aligned} \beta &= \mu + p, \\ \gamma &= 2\mu - p, \end{aligned} \quad (31)$$

тогда

$$m - \gamma = 2\mu - 2\mu + p = p,$$

$$m - \beta = 2\mu - \mu - p = \mu - p.$$

Значить  $p$  и  $\mu - p$  суть дѣлители  $2\mu$ . Теперь докажемъ, что  $p$  всегда нечетное. Если  $\mu$  четное и  $p$  четное, то  $\beta, \gamma, \alpha$  всѣ четныя, тогда уравненіе (28) сократимо, чего не можетъ быть. Значить при  $\mu$  четномъ  $p$  нечетное. Если  $\mu$  нечетное и  $p$  четное, то положимъ  $\mu - p = q$ , гдѣ  $q$  нечетное; тогда

$$\beta = 2\mu - q, \quad \gamma = \mu + q,$$

формулы того-же вида, только  $q$  нечетное. Итакъ въ формулахъ (31)  $p$  всегда нечетное. Но  $p$  дѣлитъ  $2\mu$ , значить  $\mu$  кратное  $p$ ; т. е.

$$\begin{aligned} \mu &= p, 2p, 3p, 4p, \dots, \\ \mu - p &= 0, p, 2p, 3p, \dots, \\ 2\mu &= 2p, 4p, 6p, 8p, \dots \end{aligned}$$

Сопоставляя эти ряды видимъ, что возможны только два предположенія

$$\mu = 2p, \quad \mu = 3p; \text{ слѣд.}$$

для  $\frac{\alpha}{m}, \frac{\beta}{m}, \frac{\gamma}{m}$ , при  $m > 3$ , возможны только двѣ комбинаціи

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\beta}{m} = \frac{\mu + p}{2\mu} = \frac{3}{4}, \quad \frac{\gamma}{m} = \frac{2\mu - p}{2\mu} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\beta}{m} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\gamma}{m} = \frac{5}{6}$$

Отсюда слѣдуетъ, что, при  $m > 3$ , возможны только два уравненія, интегрируемыя въ эллиптическихъ функціяхъ

$$1) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^4 = G(u-a)^2(u-b)^2(u-c)^2,$$

$$2) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^6 = G(u-a)^2(u-b)^4(u-c)^2.$$

Каждое изъ этихъ уравненій, черезъ преобразованіе, приводится въ другія; стало бытъ имѣемъ еще пять уравненій

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^4 = G(u-b)^2(u-c)^2;$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^4 = G(u-a)^2(u-b)^2;$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^6 = G(u-b)^4(u-c)^2;$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^6 = G(u-a)^2(u-c)^4;$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^6 = G(u-a)^2(u-b)^4.$$

Остается изслѣдовать еще два случая.

1) *Случай*;  $m=2$ . Возможенъ одинъ интегралъ (\*); такъ какъ

$$\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{m} + \frac{\gamma}{m} + \frac{\delta}{m} + \dots + \frac{\lambda}{m} = 2$$

и такъ какъ каждая дробь не меньше  $\frac{1}{2}$ , то

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{m} = \frac{\delta}{m} = \frac{1}{2}.$$

Уравненіе будетъ

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = G(u-a)(u-b)(u-c)(u-d).$$

---

(\*) Какъ видно изъ чертежа IV.

Если положить

$$u - a = \frac{1}{v},$$

то уравнение это преобразуется въ слѣдующее

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = H(v-b)(v-c)(v-d)$$

2) Если  $m=3$ ; тогда, принимая во вниманіе, что дроби

$$\frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3}, \frac{\gamma}{3}$$

не меньше половины и меньше единицы, заключаемъ, что

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{3} = \frac{2}{3}.$$

Уравненіе (28) будетъ вида

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = G(u-a)^2(u-b)^2(u-c)^2. \quad \dots \quad (32)$$

Посредствомъ преобразованія оно принимаетъ видъ

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = G(u-a)^2(u-b)^2.$$

Примѣръ, приводимый *Serret* (\*) относится къ типу (32) и интегрируется какъ въ § 25.

29. Замѣчаніе. Такъ какъ  $(m-\alpha)$ ,  $(m-\beta)$ ,  $(m-\gamma)$  суть дѣлители  $m$ , то

$$\frac{m}{m-\alpha} = p,$$

гдѣ  $p$  число цѣлое. Имѣемъ

$$\alpha = \frac{m(p-1)}{p},$$

$$\frac{\alpha}{m} = 1 - \frac{1}{p};$$

---

(\*) *Calcul intégral*, 1886, p. 65.

такова общая форма дробей

$$\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{m} + \frac{\gamma}{m} (**).$$

30. Теперь мы приступимъ къ подробному изслѣдованію интеграла

$$\int \frac{Fxdx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} \quad (33)$$

Мы, во первыхъ, покажемъ какъ производится обращеніе этого интеграла при помощи эллиптическихъ функций Weierstrass'a; а вторыхъ дадимъ *новый признакъ*, по которому можно узнать—выражается ли интегралъ (33) въ логарифмахъ. Мы докажемъ, что всякій разъ, когда интегралъ (33) выражается алгебраическими и логарифмическими функциями, можно безъ всякаго затрудненія интегралъ (33) вычислить. Чтобы сдѣлать *обращеніе* интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} = A$$

положимъ

$$x-a = \frac{1}{u};$$

тогда

$$dx = -\frac{1}{u^2} du,$$

$$\begin{aligned} A &= - \int \frac{du}{u \sqrt{[(a-b)u+1][(a-c)u+1]}} \\ &= - \frac{1}{\sqrt{(a-b)(a-c)}} \int \frac{du}{u \sqrt{(u-a')(u-b')}} \end{aligned}$$

гдѣ

$$a' = \frac{1}{b-a}, \quad b' = \frac{1}{c-a};$$

или

$$A = -G \int \frac{\sqrt{(u-a')(u-b')}}{u \sqrt{(u-a')^3(u-b')^3}} du,$$

гдѣ

$$G = \frac{1}{\sqrt{(a-b)(a-c)}}.$$

Опредѣлимъ аргументъ  $z$  уравненіемъ

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3 = [u-a'][u-b']^2,$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sqrt{(u-a')^2(u-b')^3}.$$

Тогда по § 25 имѣемъ

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sqrt{(u-a')^2(u-b')^3} = \frac{27}{2} p' z,$$

$$u = \frac{27}{2} p' z + \frac{a'+b'}{2}, \quad p_2 = 0,$$

$$g_2 = -\left(\frac{a'-b'}{27}\right)^2.$$

Слѣдовательно

$$\frac{27}{2} p' z = 81 p^2 z,$$

$$\sqrt{(u-a')(u-b')} = 9 p z$$

На этомъ основаніи

$$A = -\frac{1}{\sqrt{a'b'}} \int \frac{9 p z dx}{27 p z + \frac{a'+b'}{2}} \quad \text{или}$$

$$A = -\frac{2}{3} \sqrt{a'b'} \int \frac{pz \partial z}{p'z + \frac{a'+b'}{27}}, \text{ или}$$

$$A = -\frac{2}{3} \sqrt{a'b'} \int \frac{pz \left( p'z - \frac{a'+b'}{27} \right) \partial z}{4p'z + \left( \frac{a'-b'}{27} \right)^2 - \left( \frac{a'+b'}{27} \right)^2}, \text{ или}$$

$$A = -\frac{1}{6} \sqrt{a'b'} \int \frac{pz \left( p'z - \frac{a'+b'}{27} \right) \partial z}{p'z - \frac{a'b'}{27}}$$

Полагая, для краткости

$$\frac{1}{9} \sqrt{a'b'} = h,$$

имѣемъ

$$A = -\frac{3}{2} h \int \frac{pz \left( p'z - \frac{a'+b'}{27} \right) \partial z}{p'z - h^2}$$

Разлагая дробь

$$\frac{pz}{p'z - h^2}$$

имѣемъ

$$\frac{pz}{p'z - h^2} = \frac{1}{3h} \left\{ \frac{1}{p-h} + \frac{\alpha^2}{p-\alpha h} + \frac{\alpha}{p-\alpha^2 h} \right\},$$

слѣдовательно

$$A = -\frac{1}{2} \int \left\{ \frac{p'z}{p-h} + \alpha^2 \frac{p'z}{p-\alpha h} + \alpha \frac{p'z}{p-\alpha^2 h} \right\} \partial z + \\ + \frac{(a'+b')}{54} \int \left\{ \frac{1}{p-h} + \alpha^2 \frac{1}{p-\alpha h} + \alpha \frac{1}{p-\alpha^2 h} \right\} \partial z,$$

или

$$A = -\frac{1}{2} \text{Log} \left\{ (pz-h)(pz-\alpha h)^{\alpha^2} (pz-\alpha^2 h)^{\alpha} \right\} + \\ + \frac{a'+b'}{2 \cdot 3^3} \int \left\{ \frac{1}{pz-h} + \alpha^2 \frac{1}{pz-\alpha h} + \alpha \frac{1}{pz-\alpha^2 h} \right\} \partial z.$$

Извѣстно, что, если

$$h = pz_0,$$

то

$$\frac{1}{pz-h} = \frac{1}{p'z_0} \left\{ \zeta(z-z_0) - \zeta(z+z_0) + 2\zeta z_0 \right\}$$

Кромѣ того, имѣемъ три формулы однородности

$$p\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}}, \mu^2 g_1, \mu^2 g_2\right) = \mu p(u, g_1, g_2)$$

$$p'\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}}, \mu^2 g_1, \mu^2 g_2\right) = \mu \sqrt{\mu} p'(u, g_1, g_2)$$

$$\zeta\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}}, \mu^2 g_1, \mu^2 g_2\right) = \sqrt{\mu} \zeta(u, g_1, g_2)$$

Полагая

$$\sqrt{\mu} = \alpha^2, \quad g_1 = 0, \quad u = z_0$$

получимъ

$$p(\alpha z_0) = \alpha p(z_0),$$

$$p'(\alpha z_0) = p'z_0,$$

$$\zeta(\alpha z_0) = \alpha^2 \zeta(z_0).$$

Полагая

$$\sqrt{\mu} = \alpha,$$

имѣемъ

$$p(\alpha^2 z_0) = \alpha^2 p(z_0), \quad p'(\alpha^2 z_0) = p'(z_0)$$

$$\zeta(\alpha^2 z_0) = \alpha \zeta z_0.$$

Слѣдовательно

$$\frac{1}{pz-\alpha h} = \frac{1}{pz-p(\alpha z_0)} = \frac{1}{p'z_0} \left\{ \zeta(z-\alpha z_0) - \zeta(z+\alpha z_0) + 2\alpha^2 \zeta z_0 \right\},$$

$$\frac{1}{pz-p(\alpha^2 z_0)} = \frac{1}{p'z_0} \left\{ \zeta(z-\alpha^2 z_0) - \zeta(z+\alpha^2 z_0) + 2\alpha \zeta z_0 \right\},$$

слѣдовательно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{pz-h} + \frac{\alpha^2}{pz-\alpha h} + \frac{\alpha}{pz-\alpha^2 h} = \\ & = \frac{1}{p'z_0} \left\{ [\zeta(z-z_0) - \zeta(z+z_0)] + \alpha^2 [\zeta(z-\alpha z_0) - \zeta(z+\alpha z_0)] + \right. \\ & \quad \left. + \alpha [\zeta(z-\alpha^2 z_0) - \zeta(z+\alpha^2 z_0)] \right\}. \end{aligned}$$

Замѣтимъ теперь, что

$$p'z_0 = \sqrt{4h^2 + \left(\frac{a'-b'}{27}\right)^2} = \frac{a'+b'}{27}$$

На этомъ основаніи

$$\begin{aligned} & \frac{a'+b'}{2 \cdot 3^2} \int \left\{ \frac{1}{pz-h} + \frac{\alpha^2}{pz-\alpha h} + \frac{\alpha}{pz-\alpha^2 h} \right\} dz = \\ & \frac{1}{2} \left\{ \text{Log} \frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)} + \alpha^2 \text{Log} \frac{\sigma(z-\alpha z_0)}{\sigma(z+\alpha z_0)} + \alpha \text{Log} \frac{\sigma(z-\alpha^2 z_0)}{\sigma(z+\alpha^2 z_0)} \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \text{Log} \left\{ \left( \frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)} \right) \left( \frac{\sigma(z-\alpha z_0)}{\sigma(z+\alpha z_0)} \right)^{\alpha^2} \left( \frac{\sigma(z-\alpha^2 z_0)}{\sigma(z+\alpha^2 z_0)} \right)^{\alpha} \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \text{Log} \left\{ \left[ e^{2kz} \frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)} \right] \left[ e^{2\alpha^2 kz} \frac{\sigma(z-\alpha z_0)}{\sigma(z+\alpha z_0)} \right]^{\alpha^2} \left[ e^{2\alpha kz} \frac{\sigma(z-\alpha^2 z_0)}{\sigma(z+\alpha^2 z_0)} \right]^{\alpha} \right\} \end{aligned}$$

Находимъ окончательно

$$\begin{aligned} A = & \frac{1}{2} \left[ - \text{Log} \left\{ (pz-pz_0)(pz-\alpha z_0)^{\alpha^2} (pz-\alpha^2 z_0)^{\alpha} \right\} - \right. \\ & \left. - \text{Log} \left\{ \left( e^{2kz} \frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)} \right) \left( e^{2\alpha^2 kz} \frac{\sigma(z-\alpha z_0)}{\sigma(z+\alpha z_0)} \right)^{\alpha^2} \left( e^{2\alpha kz} \frac{\sigma(z-\alpha^2 z_0)}{\sigma(z+\alpha^2 z_0)} \right)^{\alpha} \right\} \right], \end{aligned}$$

гдѣ  $k$  произвольное постоянное. Если  $z_0$  есть соизмѣримая часть періода, интегралъ берется въ логарифмахъ.

Въ этомъ можно убѣдиться слѣдующимъ образомъ. Извѣстно, что, при

$$z_0 = \frac{2\bar{\omega}}{m},$$

Три функціи

$$\left( e^{2 \frac{\eta}{m} z} \frac{\sigma\left(z - \frac{2\bar{\omega}}{m}\right)}{\sigma\left(z + \frac{2\bar{\omega}}{m}\right)} \right)^m, \left( e^{2\alpha^2 \frac{\eta}{m} z} \frac{\sigma\left(z - \frac{2\alpha\bar{\omega}}{m}\right)}{\sigma\left(z + \frac{2\alpha\bar{\omega}}{m}\right)} \right)^{\alpha^2 m}, \left( e^{2\alpha \frac{\eta}{m} z} \frac{\sigma\left(z - \frac{2\alpha^2\bar{\omega}}{m}\right)}{\sigma\left(z + \frac{2\alpha^2\bar{\omega}}{m}\right)} \right)^{\alpha m}$$

выражаются рационально черезъ  $pz$  и  $p'z$ . А такъ какъ

$$\begin{aligned} A = & - \frac{1}{2} \left[ \text{Log} \left\{ (pz-pz_0)(pz-\alpha z_0)^{\alpha^2} (pz-\alpha^2 z_0)^{\alpha} \right\} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{m} \text{Log} \left\{ \left( e^{2 \frac{\eta}{m} z} \frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)} \right)^m \left( e^{2\alpha^2 \frac{\eta}{m} z} \frac{\sigma(z-\alpha z_0)}{\sigma(z+\alpha z_0)} \right)^{\alpha^2 m} \left( e^{2\alpha \frac{\eta}{m} z} \frac{\sigma(z-\alpha^2 z_0)}{\sigma(z+\alpha^2 z_0)} \right)^{\alpha m} \right\} \right] \end{aligned}$$

то имѣетъ теорему:

**Теорема.** Если аргументъ  $z_0$ , опредѣляемый уравненіемъ

$$pz_0 = \frac{1}{9} \sqrt[3]{a'b'} = \frac{1}{9 \sqrt{(a-b)(a-c)}},$$

есть соизмѣримая часть періода, интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

выражается посредствомъ логарифмовъ.

31. Два случая интегрированія въ логарифмахъ общеизвѣстны; они изложены въ статьѣ покойнаго *Н. Н. Алексѣева* (Математическій Сборникъ, томъ I, 1866, стр. 200—212). Авторъ путемъ подстановокъ приводитъ къ логарифмамъ два интеграла:

$$\begin{aligned} 1) & \int \frac{dx}{\sqrt{x^3 - p^3 x}}, \\ 2) & \int \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}}. \end{aligned}$$

Подвергнемъ эти случаи одѣннѣ съ нашей точки зрѣнія. Для интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 - p^3 x}}$$

имѣемъ

$$a=0, \quad b=p, \quad c=-p;$$

$$a' = \frac{1}{p}, \quad b' = -\frac{1}{p};$$

$$p'z_0 = \frac{a'+b'}{27} = 0,$$

слѣдовательно

$$z_0 = \zeta.$$

Интегралъ, по доказанной теоремѣ, выражается въ логарифмахъ.

Для интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

имѣемъ

$$a=1, \quad b=a, \quad c=a^3,$$

$$a'=\frac{1}{a-1}, \quad b'=\frac{1}{a^3-1}$$

$$a'b'=\frac{1}{3}, \quad h=\frac{1}{27}\sqrt[3]{9},$$

$$pz_0=\frac{1}{27}\sqrt[3]{9}.$$

$$p'z_0=-\frac{1}{27}.$$

По формулѣ удвоенія аргумента имѣемъ

$$p(2z_0)=-2pz_0+\frac{1}{4}\left(\frac{p''z_0}{p'z_0}\right)^2;$$

$$p''z_0=6p^2z_0-\frac{6.3\sqrt[3]{3}}{27^2}=\frac{2\sqrt[3]{3}}{81},$$

слѣдовательно

$$p(2z_0)=-\frac{2}{27}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4\sqrt[3]{9}}{9},$$

$$p(2z_0)=p(z_0);$$

слѣдовательно

$$2z_0=\pm z_0+2\omega.$$

Нельзя предположить

$$2z_0=z_0+2\omega,$$

ибо тогда

$$z_0=2\omega,$$

$$pz_0=\infty,$$

слѣдовательно

$$2z_0=-z_0+2\omega,$$

$$z_0=\frac{2\omega}{3}.$$

А въ этомъ случаѣ интегралъ выражается въ логарифмахъ.

Если  $a' + b' = 0$ , то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} = -\frac{1}{2} \text{Log} \left\{ (px-h)(px-ah)^{\alpha^2}(px-\alpha^2 h)^{\alpha} \right\}.$$

Такъ какъ

$$\begin{aligned} px &= \frac{1}{9} \sqrt[3]{(u-a')(u-b')} = \\ &= \frac{1}{9} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{a-b}\right) \left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{a-c}\right)} = \\ &= \frac{1}{9} \sqrt[3]{\frac{(x-b)(x-c)(x-a)}{(x-a)^2(a-b)(a-c)}} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{a'b'}}{9(x-a)} \sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{h}{x-a} \sqrt[3]{R}, \end{aligned}$$

гдѣ  $R = (x-a)(x-b)(x-c)$ ; слѣдовательно

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} &= -\frac{1}{2} \text{Log} \left\{ \left( \frac{h}{x-a} \sqrt[3]{R} - h \right) \left( \frac{h}{x-a} \sqrt[3]{R} - ah \right)^{\alpha^2} \left( \frac{h}{x-a} \sqrt[3]{R} - \alpha^2 h \right)^{\alpha} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \text{Log} \left\{ (a-x + \sqrt[3]{R}) (\alpha(a-x) + \sqrt[3]{R})^{\alpha^2} (\alpha^2(a-x) + \sqrt[3]{R})^{\alpha} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \text{Log} \left\{ (a-x + \sqrt[3]{R}) (a-x + \alpha \sqrt[3]{R})^{\alpha^2} (a-x + \alpha^2 \sqrt[3]{R})^{\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

*Примѣчаніе*

Общій пріемъ вычисленія интеграловъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

въ тѣхъ случаяхъ, когда это вычисленіе возможно, будетъ.  
предложено въ другой статьѣ.





# ЛѢТОПИСЬ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА. ОТЧЕТЪ

о дѣятельности Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ за второй годъ его существованія.

Въ началѣ отчетнаго года Общество состояло изъ 195 членовъ; въ теченіе года прибыло 10 новыхъ членовъ и трое умерло (Н. М. Охотниковъ, І. А. Клейберъ и А. М. Шулинскій). Такимъ образомъ съ января 1893 г. Общество считаетъ 202 члена.

Изъ числа скончавшихся членовъ отмѣтимъ І. А. Клейбера, талантливаго молодаго астронома, помѣстившаго двѣ работы въ журналѣ Физико-Математической сессіи, а также Н. М. Охотникова, горячо преданнаго дѣлу просвѣщенія своихъ соплеменниковъ-чуваши; всегда принимая живое участіе въ нашихъ засѣданіяхъ, Н. М. Охотниковъ почти на смертномъ одрѣ волновался мыслью объ изданіи съ помощью нашего Общества арифметическаго задачника на чувашскомъ языкѣ.

Администрацію Общества составляли избранныя въ засѣданіи 28 октября 1890 г. слѣдующія лица:

Предсѣдатель А. В. Васильевъ.

Товарищъ предсѣдателя Ѳ. М. Суворовъ.

Секретарь М. С. Сегель,

Казначей и библіотекаръ Н. П. Казанкинъ,

Члены Комитета: Д. И. Дубяго, И. А. Извозковъ, Н. П. Слугиновъ, Г. Н. Шебуевъ, Д. А. Гольдгаммеръ, А. К. Жбиковскій, І. А. Имшеникъ.

Члены ревизионной Комиссии, избранные въ засѣданіи 8-го февраля 1891 г.: Д. Л. Адамантовъ, А. М. Ковальскій и Н. В. Нечаевъ.

Въ отчетномъ году Общество имѣло 10 засѣданій, въ которыхъ было сдѣлано 42 сообщенія 18-ю лицами. Приводимъ алфавитный перечень лицъ, сдѣлавшихъ сообщенія, съ указаніемъ заглавій сообщеній:

1. Д. А. Адамантовъ. Отвѣты на вопросы, предложенные Обществомъ распространенія техническихъ знаній, касательно постановки преподаванія элементарной математики.

2. Р. О. Блажеевскій. Къ задачѣ о нахожденіи треугольника по тремъ бисектриссамъ.

3. Е. А. Болотовъ. Задача о разложеніи винта на два винта съ равными параметрами.

4. Н. В. Бугаевъ. Объ алгебраическихъ частныхъ интегралахъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

5. А. В. Васильевъ. Объ ученыхъ заслугахъ Л. Кронекера.

6. А. Н. Воейковъ. О способахъ воздѣйствія чловѣка на климатъ и почву.

7. Д. А. Гольдгаммеръ: а) Магнитное вращеніе плоскости поляризаціи свѣта;

б) Къ электрической теоріи магнитно - оптическихъ явленій;

в) Къ электромагнитной теоріи свѣта;

г) По поводу книги Poincaré: *Electricité et Optique*.

8. П. П. Граве: а) Къ теоріи трилинейныхъ координатъ.

б) Объ особенныхъ точкахъ кривыхъ.

9. И. П. Долбня. Къ теоріи абелевыхъ функцій.

10. Д. И. Дубяго: а) Объ ученой дѣятельности Г. А. Клейбера.

б) Объ ученыхъ заслугахъ сэра Джорджа Эри.

в) О пятомъ спутникѣ Юпитера.

11. А. К. Жбиковскій. О символической формулѣ произведенія многочленовъ.

12. Д. Н. Зейлигеръ: а) Механика подобно-измѣняемой системы;

б) Къ теоріи исогоналей;

в) Къ теоріи пучка нормалей;

г) По поводу одной арифметической задачи;

д) Геометрическая теорія винтовъ;

е) Объ основныхъ формулахъ тригонометріи;

ж) О площадяхъ рулеттъ;

- з) Обь одинаково работающих винтахъ;  
и) Къ динамикѣ твердаго тѣла;  
і) О кривизнѣ рулеттъ;  
к) Новое доказательство теоремы Бельтрами;  
л) Нѣкоторыя приложенія непрерывныхъ дробей;  
м) Обь одномъ мѣстѣ въ курсѣ Эрмита.
13. *И. А. Износковъ*: а) О сборникахъ алгебраическихъ задачъ (по поводу сборника Тихомірова).  
б) Воспоминаніе о В. Г. Имшенецкомъ.
14. *Н. П. Казанкинъ*: а) О диссоціаціи въ электролитическихъ растворахъ въ связи съ ихъ капиллярными свойствами;  
б) Къ теоріи растворовъ;  
в) О цвѣтныхъ растворахъ.
15. *Н. В. Нечаевъ*. О коэффициентѣ пропорціональности въ элементарной физикѣ.
16. *Д. М. Синцовъ*: а) Распространеніе коннексовъ Клебша на пространство.  
б) Обобщеніе даннаго Ріскард'омъ доказательства существованія интеграловъ системы дифференціальныхъ уравненій на комплексныя значенія переменныхъ.  
в) По поводу уравненія Рикатти.
17. *С. Н. Стемпневскій*. О приготовленіи діацетатовъ на бромисто-желатиновыхъ пластинкахъ.
18. *Е. Н. Шебуревъ*. О примѣненіи кватерніоновъ въ изученію механики подобно-измѣняемой системы.
- Кромѣ того, въ двухъ засѣданіяхъ Общества П. К. Криницынъ демонстрировалъ изобрѣтенныя имъ модели геометрическихъ тѣлъ.
- Въ заключеніе настоящаго отчета отмѣтимъ тяжелую потерю, понесенную русской наукой въ лицѣ покойнаго академика Василя Григорьевича Имшенецкаго, бывшаго профессора Казанскаго Университета. Подъ тягостнымъ впечатлѣніемъ извѣстія о смерти этого ученаго, съ горячей симпатіей относившагося къ нашему молодому обществу, товарищъ председателя, *Θ. М. Суворовъ*, произнесъ прочувствованное слово, напечатанное во 2 выпускѣ 2 тома, а затѣмъ въ декабрьскомъ засѣданіи *И. А. Износковъ* сообщилъ свои интересные воспоминанія о покойномъ.
- Кромѣ очередныхъ засѣданій, на которыхъ дѣлались перечисленныя научныя сообщенія и обсуждались педагогическіе вопросы, Общество для выполненія цѣли поставленной ему уставомъ—служить распространенію физико-математическихъ знаній—принимало и другія мѣры. Еще въ концѣ

**Списонъ періодическихъ изданій, получаемыхъ Физико-Математическимъ Обществомъ (приложеніе къ отчету за 1892 г.).**

- 1) Варшавскія Университетскія Извѣстія.
  - 2) Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной математики.
  - 3) Записки Кіевскаго Общества Естествоиспытателей.
  - 4) Записки Матем. Отд. Новоросс. Общества Естествоиспытателей.
  - 5) Записки Новороссійск. Общества Естествоиспытателей.
  - 6) Извѣстія Петровской землед. Академіи.
  - 7) Извѣстія Русск. Астрономич. Общества.
  - 8) Извѣстія Имп. Русск. Географическаго Общества.
  - 9) Лѣтописи Главн. Физ. Обсерваторіи.
  - 10) Математ. Сборникъ, изд. Моск. Матем. Общ.
  - 11) Проток. засѣданій Физ.-Мат. Общ. при Кіевск. Университетѣ.
  - 12) Метеорологическ. Сборникъ изд. Имп. Акад. Наукъ.
  - 13) Сообщенія Харьковск. Математ. Общества.
  - 14) Универс. Извѣстія Университета св. Владимира.
  - 15) Труды отдѣленія Физ. Наукъ Общества Любителей Естествознанія.
  - 16) Труды Общ. Естествоиспытат. при Казанск. Университетѣ.
  - 17) Ученыя Записки Казанск. Университета.
  - 18) Bulletin de la Société Imp. des naturalistes de Moscou.
  - 19) Mélanges mathemat. et astronomiques de l'acad. de St. Petersburg.
  - 20) Bulletin of the Philosophical Society of Washington.
  - 21) Atti della Reale accademia dei Lincei.
  - 22) Rendiconti della Reale accademia dei Lincei.
  - 23) Atti e memorie della Reale accademia in Padova.
  - 24) Il nuovo Cimento.
  - 25) Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Teixeira.
  - 26) Rivista di Matematica. Torino.
  - 27) Rendiconto dell'accademia delle scienze fisiche e matem. Napoli.
  - 28) Rendiconti del circolo matematico di Palermo.
  - 29) Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society.
  - 30) Wiskundige Opgaven. Amst.
  - 31) Nieuw Arch. voor. Wiskunde. Amsterdam
  - 32) Mathesis, publié par Mansion.
  - 33) Mémoires de l'Academie de Dijon.
  - 34) Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.
  - 35) Časopis pro pestovani matematiky a fysiky. Prof. Panek.
  - 36) American Journal of Mathematics.
  - 37) Journal de Mathem. Elementaires par Vuibert.
  - 38) Revue de Mathem. Spéciales. par Niewenglowski.
-